Matematika szigorlat G (A3) – 2020. január 6.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a,b]$, amire $f(x) = y$.

3. Mondja ki a $\frac{0}{0}$ típusú határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.

   Megoldás. Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ és létezik $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, akkor $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4. Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát.

   Megoldás. Egy f_n függvénysor a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és összegfüggvénye ott s, ha $\forall\epsilon\exists N_0 \in \mathbb{N}\forall x\forall n \geq N_0 : |s(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| < \epsilon$.

5. Adjon szükséges és elégséges feltételt homogén lineáris egyenletrendszer megoldásának egyértelműségére az együtthatómátrix rangja segítségével.

   Megoldás. A megoldás akkor egyértelmű, ha az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával.

6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x,y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.

   Megoldás. Ha $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{yx}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$, akkor az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőérték van.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t.$

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Definiálja az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

    Megoldás. Az $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Wronski-determinánsa a

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

    függvény.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \left(1 + 2^{-n}\right)^{2^n + n^2}$$
$$b_n = e^{n + e^{-n}} - e^n$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 2^{-n}\right)^{2^n + n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\right]^{1 + n^2 2^{-n}} = e,$$

mivel $(1 + 1/n)^n \to e$ és a külső kitevő határértéke 1.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} e^{n + e^{-n}} - e^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{e^{-n}} - 1}{e^{-n}} = 1,$$

mivel $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ és $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

2. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushely. A határértékek

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} \frac{1}{e^{-x} + 1} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 1.$$

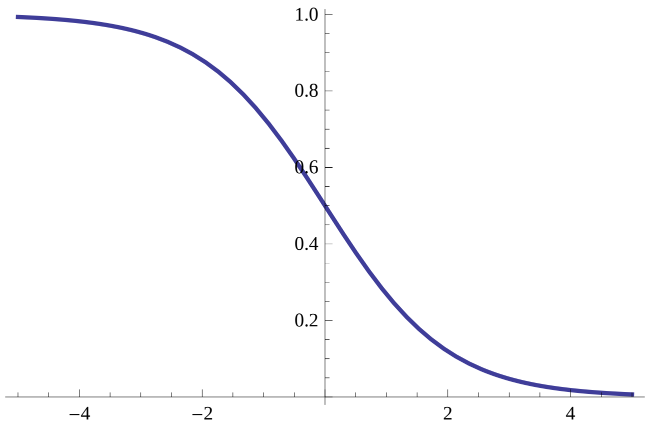
A deriváltak

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$
$$f''(x) = -\frac{e^x(1 + e^x)^2 - e^x \cdot 2(1 + e^x)e^x}{(1 + e^x)^4} = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}.$$

f' mindenhol szigorúan negatív, f'' zérushelye $x = 0$. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f	$\searrow$	infl	$\searrow$
f'	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$

Láttuk, hogy mindkét irányban vízszintes aszimpototа van. $R_f = (0; 1)$, grafikon:



3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. A Cauchy–Hadamard-tétel segítségével meghatározzuk a konvergenciasugarat:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\ln n}} = 1.$$

Az $x = -1$ pontban a sor Leibniz-sor, mivel $n \ln n \to \infty$ monoton növekedve. Az $x = 1$ pontban az integrálkritériumot használhatjuk ($\frac{1}{x\ln x}$ monoton nő, ha $x \geq \frac{1}{e}$):

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x}(\ln x)^{-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\ln x\right]_2^b = \infty,$$

tehát az

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln n}$$

sor is divergens. A hatványsor konvergenciatartománya tehát $[-1, 1)$.

4. Állítsa elő a $-2\mathbf{i}$ vektort az $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ és $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Megoldás. Az $x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + x_3\mathbf{c} = -2\mathbf{i}$ egyenletet az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ komponensek szerint felírva egy lineáris egyenletrendszerhez jutunk, aminek a kibővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Az egyenletrendszert megoldhatjuk Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-s_1\\ s_3-s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s_1+4s_3\\ s_2-5s_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \overset{s_1+2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \overset{\substack{s_1/2\\ s_2/(-2)\\ s3\cdot(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Tehát $-2\mathbf{i} = -5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$.

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y, z) = \dfrac{1 + xy + xz}{\sqrt{1 + x^2}}\mathbf{i} + \sqrt{1 + x^2}\mathbf{j} + \sqrt{1 + x^2}\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.

Megoldás. A vektormező mindenhol folytonosan differenciálható, tehát pontosan akkor potenciálos, ha a deriváltja szimmetrikus.

$$\frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u_x(x,y,z)}{\partial z} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u_y(x,y,z)}{\partial z} = 0 = \frac{\partial u_z(x,y,z)}{\partial y},$$

tehát potenciálos.
Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \operatorname{arsinh} x + (y+z)\sqrt{1+x^2}. \end{aligned}$$

6. Oldja meg az $y'' + 2y' + 17y = 1$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris állandó együtthatós, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 17$, ennek gyökei $-1 \pm 4i$. Eszerint a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-x}\cos 4x + Be^{-x}\sin 4x$.
Az inhomogén tag polinom, nincs külső rezonancia, $y(x) = C$ alakú megoldást keresünk. Behelyettesítve $17C = 1$ adódik, azaz $C = \frac{1}{17}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása és deriváltja

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{17} + Ae^{-x}\cos 4x + Be^{-x}\sin 4x \\ y'(x) &= -Ae^{-x}\cos 4x - 4Ae^{-x}\sin 4x - Be^{-x}\sin 4x + 4Be^{-x}\cos 4x, \end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= \frac{1}{17} + A \\ 0 = y'(0) &= -A + 4B, \end{aligned}$$

amiből $A = -\frac{1}{17}$ és $B = -\frac{1}{68}$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $y(x) = \frac{1}{17} - \frac{1}{17}e^{-x}\cos 4x - \frac{1}{68}e^{-x}\sin 4x$.

7. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^2 & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját.

Megoldás.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(z) &= \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 e^{-zx}(1-x)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{e^{-zx}}{z}(1-x)^2\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(-\frac{e^{-zx}}{z}\right) 2(1-x)(-1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{e^{-zx}}{z}(1-x)^2\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \left(-\frac{e^{-zx}}{z}\right) 2(1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{e^{-zx}}{z}(1-x)^2 + \frac{e^{-zx}}{z^2}2(1-x)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(\frac{e^{-zx}}{z^2}\right)(-2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{e^{-zx}}{z}(1-x)^2 + \frac{e^{-zx}}{z^2}2(1-x) - 2\frac{e^{-zx}}{z^3}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -2\frac{e^{-z}}{z^3} + \frac{1}{z} - 2\frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z^3} \end{aligned}$$