Matematika szigorlat G (A3) – 2020. január 6.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Mondja ki a Bolzano-tételt.
3. Mondja ki a $\frac{0}{0}$ típusú határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.
4. Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát.
5. Adjon szükséges és elégséges feltételt homogén lineáris egyenletrendszer megoldásának egyértelműségére az együtthatómátrix rangja segítségével.
6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
10. Definiálja az $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható függvények Wronski-determinánsának fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \left(1 + 2^{-n}\right)^{2^n + n^2}$$
$$b_n = e^{n + e^{-n}} - e^n$$

2. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ hatványsor konvergenciatartományát.
4. Állítsa elő a $-2\mathbf{i}$ vektort az $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ és $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ vektorok lineáris kombinációjaként.
5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y, z) = \dfrac{1 + xy + xz}{\sqrt{1 + x^2}}\mathbf{i} + \sqrt{1 + x^2}\mathbf{j} + \sqrt{1 + x^2}\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.
6. Oldja meg az $y'' + 2y' + 17y = 1$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} (1 - x)^2 & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját.