Matematika szigorlat G (A3) – 2020. január 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az $a_n = aq^n$ mértani sorozat? Mi a határértéke?

   Megoldás. A konvergencia feltétele $-1 < q \leq 1$. Ha $|q| < 1$, akkor a határérték 0, ha $q = 1$, akkor pedig a.

2. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható (a, b)-n, deriváltja ott f és f integrálható, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Írja fel a geometriai (=mértani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?

   Megoldás. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, pontosan akkor konvegens, ha $|q| < 1$, ekkor az összege $\frac{a}{1-q}$.

5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.

   Megoldás. Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor f $\mathbf{e}$ irányú deriváltjának az $\mathbf{r}_0$ pontban a $t \mapsto f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{e})$ függvény 0-beli deriváltját nevezzük.

7. Definiálja egy $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ függvény Lipschitz-folytonosságának fogalmát.

   Megoldás. $\mathbf{r}$ Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $L \in \mathbb{R}$ szám, amire $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ esetén $|\mathbf{r}(x_1) - \mathbf{r}(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

    Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushely. A határértékek

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0.$$

   A deriváltak

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$
$$f''(x) = -\frac{(e^x(x-2)+e^x)x^3 - e^x(x-2)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}.$$

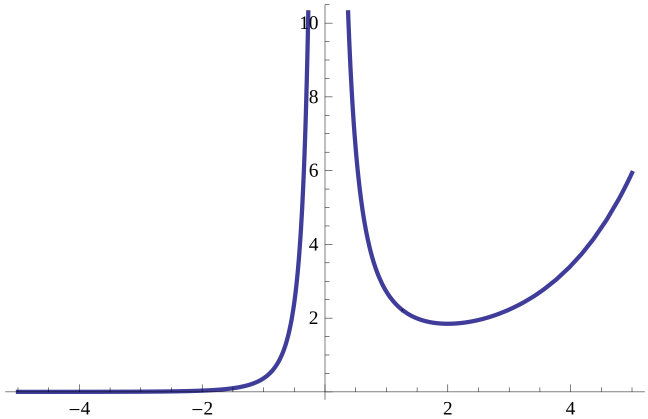
   f' zérushelye $x = 2$, f'' sehol nem 0, mivel a másodfokú tényező diszkriminánsa $(-4)^2 - 4 \cdot 6 = -8 < 0$. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
f	$\nearrow$	X	$\searrow$	min	$\nearrow$
f'	$-$	X	$-$	0	$+$
f''	$+$	X	$+$	$+$	$+$

   Láttuk, hogy $-\infty$ irányban vízszintes aszimpotota van.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty$$

   miatt $+\infty$ irányban nincs ferde aszimpotota. $R_f = (0; \infty)$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{3/2} + \sqrt{x}} \, dx$$

   Megoldás. A primitív függvény meghatározásához $x = u^2$, $dx = 2u \, du$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^{3/2}+\sqrt{x}} \, dx &= \int \frac{1}{u^3+u} 2u \, du \\ &= \int \frac{2}{u^2+1} \, du \\ &= 2\arctan u = 2 \arctan \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

   Mivel az integrandus $x \to 0$ esetén nem korlátos és az integrálási tartomány is végtelen, két részintervallumra bontjuk:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{x^{3/2}+\sqrt{x}} \, dx &= \int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}+\sqrt{x}} \, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}+\sqrt{x}} \, dx \\ &= \lim_{a\to 0+} \left[2\arctan\sqrt{x}\right]_a^1 + \lim_{b\to\infty} \left[2\arctan\sqrt{x}\right]_1^b \\ &= \lim_{a\to 0+} \left(2\arctan 1 - 2\arctan\sqrt{a}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan\sqrt{b} - 2\arctan 1\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 + \pi - \frac{\pi}{2} = \pi, \end{aligned}$$

mivel mindkét határérték létezik és véges.

3. Határozza meg az $f(x) = \cosh x$ ha $-\pi \le x < \pi$ függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát. Ennek segítségével számítsa ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

sor összegét.

Megoldás. A függvény páros, tehát a Fourier-sora tisztán koszinusz sor:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\sinh x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sinh \pi}{\pi}$$

és

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh x \cos nx\,\mathrm{d}x.$$

A primitív függvényt két parciális integrálással határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}\int \cosh x \cos nx\,\mathrm{d}x &= \sinh x \cos nx - \int \sinh x(-n \sin nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \sinh x \cos nx + n \left(\cosh x \sin nx - \int \cosh x(n \cos nx)\,\mathrm{d}x \right),\end{aligned}$$

ebből átrendezéssel

$$\int \cosh x \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+n^2} \sinh x \cos nx + \frac{n}{1+n^2} \cosh x \sin nx + C.$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján

$$a_n = (-1)^n \frac{2}{\pi} \frac{\sinh \pi}{1+n^2},$$

tehát a Fourier-sor

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\pi} \frac{\sinh \pi}{1+n^2} \cos nx.$$

Mivel f folytonos és szakaszonként folytonosan differenciálható, a Fourier-sor minden pontban előállítja. $x = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$1 = f(0) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2},$$

ebből átrendezve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = 1 + \frac{\pi}{2 \sinh \pi} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2 \sinh \pi} + \frac{1}{2}$$

4. Az a valós paramétertől függően hány megoldása van az

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 &= a \\ 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek?

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített mátrixán Gauss-eliminációt végzünk:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & a \\ 3 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_2 - 3s_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1-3a \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3 - 2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+6a \end{array}\right].$$

Ebben az alakban láthatjuk, hogy az együtthatómátrix rangja 2, a kibővített mátrix rangja pedig $a = \frac{1}{6}$ esetén 2, egyébként 3. Mivel az ismeretlenek száma 4, $a = \frac{1}{6}$ esetén végtelen sok megoldás van, ha $a \neq \frac{1}{6}$, akkor viszont nincs megoldás.

5. Integrálja az $f(x, y, z) = \sqrt{2 - y^2}$ skalármezőt az $y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 3$ egyenletrendszerű görbén.

Megoldás. A megadott görbe egy hengerpalást és egy sík metszete, az $x = 0$ síkra vett vetület egy paraméterezése $(0, \cos t, \sin t)$ $(t \in [0, 2\pi])$, a második egyenletből x kifejezhető, így a térgörbe $\mathbf{r}(t) = (3 - \cos t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$ paraméterezését kapjuk. A derivált abszolútértéke

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = |\sin t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}| = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \sin^2 t},$$

a skalármező értéke a görbén

$$f(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{2 - \cos^2 t}.$$

A skalármező görbementi integrálja

$$\int f \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t))|\dot{\mathbf{r}}(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 - \cos^2 t)(1 + \sin^2 t)} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t) \, \mathrm{d}t = 3\pi.$$

6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = 3xz^2\mathbf{i} + (y^3 + x^2y)\mathbf{j} + (2x^2z - z^3)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ egyenletű felületen kifelé mutató irányítás mellett.

Megoldás. Használhatjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) = \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial u_z(x, y, z)}{\partial z} = 3z^2 + 3y^2 + x^2 + 2x^2 - 3z^2 = 3x^2 + 3y^2.$$

Az alakzat 2 egység sugarú gömbfelület, ami az ugyanilyen sugarú B gömb pereme. A térfogati integrál számításához használjunk $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \sin\vartheta \cos\varphi\mathbf{i} + r \sin\vartheta \sin\varphi\mathbf{j} + r \cos\vartheta\mathbf{k}$ gömbi koordinátákat, a Jacobi-determináns $r^2 \sin\vartheta$. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_B \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2} \left(3r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + 3r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi\right) r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^2 r^4 \, \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} 3 \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{32}{5} \int_0^{\pi} (\sin\vartheta - \cos^2\vartheta \sin\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta \cdot 6\pi \\
&= \frac{32}{5} \left[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi} \cdot 6\pi = \frac{256}{5}\pi.
\end{aligned}$$

7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 3y = xe^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris állandó együtthatós, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3)$, ennek gyökei -1 és -3. Eszerint a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x}$.
Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, külső rezonancia van, $y(x) = x(C_0 + C_1x)e^{-x}$ alakú megoldást keresünk. Ennek deriváltjai

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (C_0 + C_1x)e^{-x} + C_1xe^{-x} - x(C_0 + C_1x)e^{-x} = (C_0 - C_0x + 2C_1x - C_1x^2)e^{-x} \\
y''(x) &= (-C_0 + 2C_1 - 2C_1x)e^{-x} - (C_0 - C_0x + 2C_1x - C_1x^2)e^{-x} = (2C_0 - 2C_1 + C_0x - 4C_1x + C_1x^2)e^{-x}.
\end{aligned}$$

Az egyenletbe helyettesítve

$$2(C_0 + C_1 + 2C_1x)e^{-x} = xe^{-x}$$

adódik, ami akkor teljesül minden x esetén, ha $2C_0 + 2C_1 = 0$ és $4C_1 = 1$, azaz $C_1 = -C_0 = \frac{1}{4}$. A differenciálegyenlet általános megoldása $y(x) = \frac{1}{4}x(x-1)e^{-x} + Ae^{-x} + Be^{-3x}$.