

Matematika szigorlat G (A3) – 2020. január 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az $a_n = aq^n$ mértani sorozat? Mi a határértéke?
2. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
4. Írja fel a geometriai (=mértani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?
5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.
7. Definiálja egy $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény Lipschitz-folytonosságának fogalmát.
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.
10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{3/2} + \sqrt{x}} dx$$

3. Határozza meg az $f(x) = \cosh x$ ha $-\pi \leq x < \pi$ függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát. Ennek segítségével számítsa ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

sor összegét.

4. Az a valós paramétertől függően hány megoldása van az

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 = a$$

$$2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1$$

egyenletrendszernek?

5. Integrálja az $f(x, y, z) = \sqrt{2-y^2}$ skalármezőt az $y^2 + z^2 = 1$, $x + y = 3$ egyenletrendszerű görbén.
6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = 3xz^2\mathbf{i} + (y^3 + x^2y)\mathbf{j} + (2x^2z - z^3)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ egyenletű felületen kifelé mutató irányítás mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 3y = xe^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.