Matematika szigorlat G (A3) – 2020. január 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f'' nemnegatív.

2. Mondja ki Rolle tételét.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható, és tegyük fel, hogy $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = 0$.

3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0, b]$ intervallumon, ahol $0 \leq b$, és létezik a $\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és ∞ közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát.

   Megoldás. Egy f_n függvénysor a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és összegfüggvénye ott s, ha $\forall\epsilon\exists N_0 \in \mathbb{N}\forall x\forall n \geq N_0 : |s(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| < \epsilon$.

5. Írja fel a sík origó körüli α szögű forgatásának a mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban.

   Megoldás. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontbeli folytonosságának fogalmát.

   Megoldás. f folytonos (x_0, y_0)-ban, ha $\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Ismertesse a szukcesszív approximáció fogalmát.

   Megoldás. Az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-probléma megoldásának szukcesszív approximációja alatt a $\varphi_0(x) = y_0$,

   $$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi))\,\mathrm{d}\xi$$

   rekurzióval definiált függvénysorozatot értjük.

10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

    Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}z$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$b_n = n^2 \left(n - \sqrt{n^2+1}\right)$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^2 = 1,\end{aligned}$$

mivel $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ és $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} n^2 \left(n - \sqrt{n^2+1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{n^2 - (n^2+1)}{n + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} n \frac{-1}{1 + \sqrt{1+n^{-2}}} = -\infty.\end{aligned}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int x\sqrt{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. A négyzetgyök alatti másodfokú polinomot teljes négyzetté alakítjuk: $x^2-6x+10 = (x-3)^2+1$, majd $x-3 = \sinh t$, $\mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x &= \int x\sqrt{(x-3)^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int (3+\sinh t)\sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\,\mathrm{d}x \\ &= \int (3+\sinh t)\cosh^2 t\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(3\frac{1+\cosh 2t}{2} + \sinh t\cosh^2 t\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sinh 2t + \frac{\cosh^3 t}{3} \\ &= \frac{3}{2}\operatorname{arsinh}(x-3) + \frac{3}{4}\sinh 2\operatorname{arsinh}(x-3) + \frac{\cosh^3 \operatorname{arsinh}(x-3)}{3}.\end{aligned}$$

3. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$ függvény $x_0 = 0$ pont középpontú Taylor-sorát.

Megoldás. A nevezőt szorzattá alakítjuk, majd a függvényt parciális törtekre bontjuk: $x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-x-6} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \\ 1 &= A(x+2) + B(x-3) = (A+B)x + (2A-3B),\end{aligned}$$

a két polinom akkor egyenlő, ha $A+B=0$ és $2A-3B=1$, azaz $A = \frac{1}{5} = -B$.
A fentiek alapján

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{5}\frac{1}{x-3} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+2} \\ &= -\frac{1}{15}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{-x}{2}} \\ &= -\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n - \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{15}\frac{1}{3^n} - (-1)^n\frac{1}{10}\frac{1}{2^n}\right)x^n\end{aligned}$$

ha $|x| < 2$.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^2y + xy^2 + 3xy$ függvény lokális szélsőértékei?

   Megoldás. Lokális szélsőérték ott lehet, ahol mindkét parciális derivált eltűnik.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + y^2 + 3y = (2x + y + 3)y$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + 2xy + 3x = (3y + x + 3)x,$$

   a közös zérushelyek $(-1, -1), (-3, 0), (0, -3), (0, 0)$. A Hesse-mátrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x + 2y + 3 \\ 2x + 2y + 3 & 2x \end{bmatrix},$$

   a zérushelyeken kiértékelve rendre

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Az első negatív definit, a többi indefinit, tehát $(x, y) = (-1, -1)$ lokális maximum, a többi stacionárius pont nyeregpont.

5. Számítsa ki a $z = 2x^2 + y^2$ egyenletű felület $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$ darabjának a felszínét.

   Megoldás. A felület egy paraméterezése $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \cos \phi \mathbf{i} + 2\rho \sin \phi \mathbf{j} + \left(2\rho^2 \cos^2 \phi + 4\rho^2 \sin^2 \phi\right) \mathbf{k}$, a darabnak megfelelő paramétertartomány $[0, 1] \times [0, 2\pi]$, ezen kell a parciális deriváltak vektoriális szorzatának abszolútértékét integrálni:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(\rho,\phi)}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\rho,\phi)}{\partial \rho} \right| &= \left| \left(\cos \phi \mathbf{i} + 2 \sin \phi \mathbf{j} + (4\rho \cos^2 \phi + 8\rho \sin^2 \phi)\mathbf{k}\right) \times \left(-\rho \sin \phi \mathbf{i} + 2\rho \cos \phi + 4\rho^2 \cos \phi \sin \phi \mathbf{k}\right) \right| \\ &= \left| (-8\rho^2 \cos^3 \phi - 8\rho^2 \cos \phi \sin^2 \phi)\mathbf{i} + (-8\rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi - 8\rho^2 \sin^3 \phi)\mathbf{j} + (2\rho \cos^2 \phi + 2\rho \sin^2 \phi)\mathbf{k} \right| \\ &= 2\rho\sqrt{1 + 16\rho^2}. \end{aligned}$$

   A felszín

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\rho\sqrt{1 + 16\rho^2} \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{16} \frac{(1 + \rho^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \left(-1 + 17\sqrt{17}\right) \pi. \end{aligned}$$

6. Határozza meg az $y + 2e^x y^2 + (1 + 2e^x y)y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 + 4e^x y$$
$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2e^x y,$$

   tehát nem egzakt. Létezik viszont csak x-től függő integráló tényező:

$$\ln |M(x)| = \int \frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1 + 2e^x y}{1 + 2e^x y} \, \mathrm{d}x = x + C,$$

   tehát $M(x) = e^x$ ilyen. Az eddigiek alapján az $e^x y + 2e^{2x} y^2 + (e^x + 2e^{2x} y)y' = 0$ egyenlet egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$u(x, y) = \int_0^x 0 \, \mathrm{d}\xi + \int_0^y (e^x + 2e^{2x} \eta) \, \mathrm{d}\eta = e^x y + e^{2x} y^2,$$

   ezzel az általános megoldás $u(x, y(x)) = C$. A megoldás explicit alakban is felírható: $y(x) = \tilde{C} e^{-x}$, mivel $u(x, y)$ csak az $e^x y$ szorzattól függ (vagy a megoldóképletből számolva).

7. Oldja meg az $y'' + 6y' + 5y = x$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris állandó együtthatós, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+6\lambda+5=(\lambda+1)(\lambda+5)$, ennek gyökei -1 és -5. Eszerint a homogén egyenlet általános megoldása $y(x)=Ae^{-x}+Be^{-5x}$.
Az inhomogén tag polinom, nincs külső rezonancia, $y(x)=C_0+C_1x$ alakú megoldást keresünk. A deriváltak $y'(x)=C_1$, $y''(x)=0$, behelyettesítve az egyenlet

$$6C_1+5(C_0+C_1x)=x,$$

ami akkor teljesül minden x esetén, ha $C_1=\frac{1}{5}$ és $C_0=-\frac{6}{25}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása és deriváltja

$$\begin{aligned} y(x)&=-\frac{6}{25}+\frac{1}{5}x+Ae^{-x}+Be^{-5x}\\ y'(x)&=\frac{1}{5}-Ae^{-x}-5Be^{-5x}, \end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 0=y(0)&=-\frac{6}{25}+A+B\\ 0=y'(0)&=\frac{1}{5}-A-5B, \end{aligned}$$

amiből $A=\frac{1}{4}$ és $B=-\frac{1}{100}$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $y(x)=-\frac{6}{25}+\frac{1}{5}x+\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{100}e^{-5x}$.