Matematika szigorlat G (A3) – 2020. január 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második derivált segítségével?
2. Mondja ki Rolle tételét.
3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.
4. Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát.
5. Írja fel a sík origó körüli α szögű forgatásának a mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontbeli folytonosságának fogalmát.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Ismertesse a szukcesszív approximáció fogalmát.
10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$b_n = n^2 \left(n - \sqrt{n^2 + 1}\right)$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int x\sqrt{x^2 - 6x + 10}\,\mathrm{d}x$$

3. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ függvény $x_0 = 0$ pont középpontú Taylor-sorát.
4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^2 y + xy^2 + 3xy$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Számítsa ki a $z = 2x^2 + y^2$ egyenletű felület $x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$ darabjának a felszínét.
6. Határozza meg az $y + 2e^x y^2 + (1 + 2e^x y)y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Oldja meg az $y'' + 6y' + 5y = x$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.