Matematika szigorlat G (A3) – 2020. február 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $1-\sqrt{3}i$ számot.

   Megoldás. A trigonometrikus alak $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. $1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$.

3. Mondja ki a Weierstrass-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, létezik minimuma és maximuma, azaz léteznek $c,d \in [a,b]$ számok, amire minden $x \in [a,b]$ esetén $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

4. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.

   Megoldás. A $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergens. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.

5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

   Megoldás. Pontosan akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik.

6. Írja fel az $f(x,y)$ kétváltozós függvény (x_0,y_0) pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.

   Megoldás.

$$
\begin{aligned}
&f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f''_{yy}(y-y_0)^2
\end{aligned}
$$

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező vektorpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon vektorpotenciál.

8. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha $\mathbf{v}$ (skalár-)potenciálos vektormező, egy potenciálja U, és $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe, akkor $\mathbf{v}$ integrálja a görbe mentén $U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a))$.

9. Írja fel az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

   Megoldás. $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, ahol $a_0,\ldots,a_n,b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények.

10. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

    Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0,\mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1+x^3}{2-x^3}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushely a -1. A határértékek

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-3}+1}{2x^{-3}-1} = -1$$
$$\lim_{x\to\sqrt[3]{2}\pm} f(x) = \lim_{x\to\sqrt[3]{2}\pm} \frac{1+x^3}{2-x^3} = \mp\infty.$$

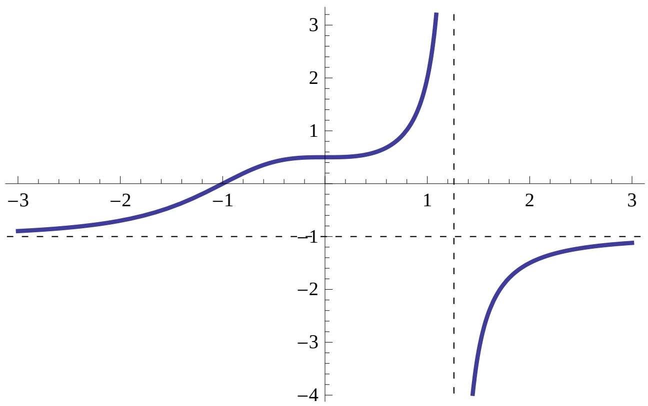
A deriváltak

$$f'(x) = \frac{3x^2(2-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(2-x^3)^2} = \frac{9x^2}{(2-x^3)^2}$$
$$f''(x) = \frac{18x(2-x^3)^2 - 9x^2\cdot 2(2-x^3)(-3x^2)}{(2-x^3)^4} = \frac{36x(1+x^3)}{(2-x^3)^3}.$$

f' zérushelye $x=0$, f'' zérushelyei 0 és -1. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2},\infty)$
f	$\smile$	infl	$\frown$	infl	$\smile$	X	$\frown$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$+$	X	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	X	$-$

Láttuk, hogy mindkét irányban vízszintes aszimpotota van. $R_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Először $x = \ln u$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u+1}{u^2+1}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u+1}{u(u^2+1)}\,\mathrm{d}u.$$

A kapott racionális törtfüggvényt az integráláshoz parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{u+1}{u(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B+Cu}{u^2+1}$$
$$u+1 = A(u^2+1) + (B+Cu)u = (A+C)u^2 + Bu + A,$$

amiből a $0 = A + C$, $1 = B$, $1 = A$ egyenletrendszer adódik, azaz $C = -1$. Ezzel az integrál

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u+1}{u(u^2+1)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{2}\frac{2u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \ln|u| + \arctan u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) \\ &= x + \arctan e^x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C.\end{aligned}$$

3. Számítsa ki az

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 25 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátértékekből álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

Megoldás. A sajátértékek $\det(A - \lambda I) = 0$ gyökei, a determináns

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -10-\lambda & -5 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 25 & 5 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-10-\lambda)((5-\lambda)(7-\lambda)-10) + 25(-5\cdot 2 - (-4)(5-\lambda))$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 5).$$

A sajátértékek $\lambda = 0$ és $\lambda = 1 \pm 2i$. Mivel a dimenzióval megegyező számú különböző sajátérték van, létezik sajátvektorokból álló bázis.
A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 25 & 5 & 7 \end{bmatrix} \overset{s_3+5/2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{15}{2} & -3 \end{bmatrix} \overset{s_3+3/2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_3+3/2s_2}{\sim}$$

alapján $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 1 + 2i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat meghatározó homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa

$$\begin{bmatrix} -11-2i & -5 & -4 \\ 0 & 4-2i & 2 \\ 25 & 5 & 6-2i \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy az utolsó két sor lineárisan független, tehát elég ezekkel foglalkozni (hiszen a három egyenlet lineárisan összefüggő). A sajátvektor második vagy harmadik komponensét szabadon megválaszthatjuk. Érdemes a második komponenst rögzíteni, mert így elkerüljük a komplex számmal osztást. Legyen például 1, ekkor a második egyenlet alapján a harmadik komponens $-2 + i$, az utolsó egyenlet szerint pedig az első komponens

$$-\frac{1}{25}(5 + (6-2i)(-2+i)) = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

A sajátvektorok tehát $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i & 1 & -2+i \end{bmatrix}^T$ többszörösei (azaz $\begin{bmatrix} 1-2i & 5 & -10+5i \end{bmatrix}^T$ többszörösei).
A mátrix elemei valósak, így a $\lambda = 1 - 2i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az előbbi konjugáltjai, tehát $\begin{bmatrix} 1+2i & 5 & -10-5i \end{bmatrix}^T$ többszörösei.

4. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^2 \int_y^2 e^{x^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Megoldás. Az $x \mapsto e^{x^2}$ függvény nem elemi függvény deriváltja, ezért először felcseréljük az integrálás sorrendjét. Az integrálási tartomány

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le y \le 2, y \le x \le 2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x\right\},$$

így

$$\int_0^2 \int_y^2 e^{x^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^x e^{x^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 x e^{x^2} \,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{1}{2} e^{x^2}\right]_0^2 = \frac{e^4 - 1}{2}.$$

5. Hol van a súlypontja az $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$, $x^2 + y^2 \le z^2$, $z \ge 0$ egyenlőtlenségrendszerrel megadott alakzatnak?

Megoldás. A súlypont koordinátái az elsőrendű nyomatékok és a térfogat hányadosaként számíthatóak ki. Az alakzat egy origó középpontú gömb és egy origó csúcsú kúp metszete, gömbi koordinátákat érdemes használni: $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta\mathbf{k}$, a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$, az integrálási tartomány $[0,\sqrt{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,2\pi]$. A szükséges integrálok

$$\begin{aligned}
\iiint x\,\mathrm{d}V &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} r\sin\vartheta\cos\varphi r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 2\vartheta}{2}\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0\\
\iiint y\,\mathrm{d}V &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} r\sin\vartheta\sin\varphi r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 2\vartheta}{2}\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0\\
\iiint z\,\mathrm{d}V &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} r\cos\vartheta r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/4}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\\
\iiint \mathrm{d}V &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/4}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)\pi,
\end{aligned}$$

tehát a súlypont helyvektora $\frac{3}{8}(1+\sqrt{2})\mathbf{k}$.

6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = 3x^2y\mathbf{i} + (y^3+x^2y)\mathbf{j} + (2x^2z - z^3)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2+4y^2=4$, $z=0$ egyenletrendszerrel megadott görbén a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárás szerint irányítva.

   Megoldás. A vektormezőt zárt görbén integráljuk, lehet használni a Stokes-tételt.

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix} = -4xz\mathbf{j} + (2xy - 3x^2)\mathbf{k}.$$

   A görbe egy S ellipszis pereme, az ellipszist paraméterezhetjük $\mathbf{r}(\rho,\phi) = 2\rho\cos\phi\mathbf{i} + \rho\sin\phi\mathbf{j}$ módon ($0\le\rho\le 1$, $0\le\phi\le 2\pi$), a normálvektor

$$\frac{\partial\mathbf{r}(\rho,\phi)}{\partial\rho}\times\frac{\partial\mathbf{r}(\rho,\phi)}{\partial\phi} = (2\cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j})\times(-2\rho\sin\phi + \rho\cos\phi) = 2\rho\mathbf{k},$$

   ez éppen az irányításnak megfelelő. Az integrál tehát

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot\frac{\partial\mathbf{r}(\rho,\phi)}{\partial\rho}\times\frac{\partial\mathbf{r}(\rho,\phi)}{\partial\phi}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(8\rho^3\cos\phi\sin\phi - 24\rho^3\cos^2\phi\right)\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = -24\pi\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho = -6\pi.
\end{aligned}$$

7. Oldja meg az $y'' + 6y' + 13y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet homogén lineáris állandó együtthatós, a karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 6\lambda + 13$, ennek gyökei $-3\pm 2i$. Eszerint a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-3x}\cos 2x + Be^{-3x}\sin 2x$, deriváltja

$$y'(x) = -3Ae^{-3x}\cos 2x - 2Ae^{-3x}\sin 2x - 3Be^{-3x}\sin 2x + 2Be^{-3x}\cos 2x.$$

   A kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}
1 &= y(0) = A\\
0 &= y'(0) = -3A + 2B,
\end{aligned}$$

   amiből $A = 1$ és $B = \frac{3}{2}$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $y(x) = e^{-3x}\cos 2x + \frac{3}{2}e^{-3x}\sin 2x$.