

Matematika szigorlat G (A3) – 2020. február 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $1 - \sqrt{3}i$ számot.
2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.
3. Mondja ki a Weierstrass-tételt.
4. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.
5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
6. Írja fel az $f(x, y)$ kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező vektorpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
9. Írja fel az n -edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.
10. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \frac{1+x^3}{2-x^3}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx$$

3. Számítsa ki az

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 25 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátértékekből álló bázis (\mathbb{C} felett)?

4. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^2 \int_y^2 e^{x^2} dx dy$$

5. Hol van a súlypontja az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$ egyenlőtlenség-rendszerrel megadott alakzatnak?
6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + (y^3 + x^2y)\mathbf{j} + (2x^2z - z^3)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + 4y^2 = 4$, $z = 0$ egyenletrendszerrel megadott görbén a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körülférés szerint irányítva.
7. Oldja meg az $y'' + 6y' + 13y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.