**Matematika szigorlat G (A3)** – 2020. június 5.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$
\begin{aligned}
a_n &= (e^{1/n} - 1)\frac{3^n}{n^2 + 2^n} \\
b_n &= \sqrt[n]{55n^{97} - 36n^{71} + 2^{-n}}
\end{aligned}
$$

*Megoldás.* Mivel az exponenciális függvény konkáv, a második tényező pedig pozitív,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (e^{1/n} - 1)\frac{3^n}{n^2 + 2^n} \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{3^n}{n^2 + 2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{2^{-n}n^2 + 1} = \infty.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{55n^{97} - 36n^{71} + 2^{-n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{55}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{97} \sqrt[n]{1 - \frac{36}{55}n^{-26} + \frac{1}{55}n^{-97}2^{-n}} = 1
\end{aligned}
$$

2. Végezze el az $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

*Megoldás.* $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. Mivel $\arctan x < \frac{\pi}{2}$, az egyetlen zérushely a 0. A határértékek ($\infty$-ben a L'Hospital-szabályt alkalmazhatjuk)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1 \\
&\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = -\infty.
\end{aligned}
$$

A deriváltak

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{x}{1+x^2} \\
f''(x) &= -\frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2}{(1+x^2)^2}.
\end{aligned}
$$

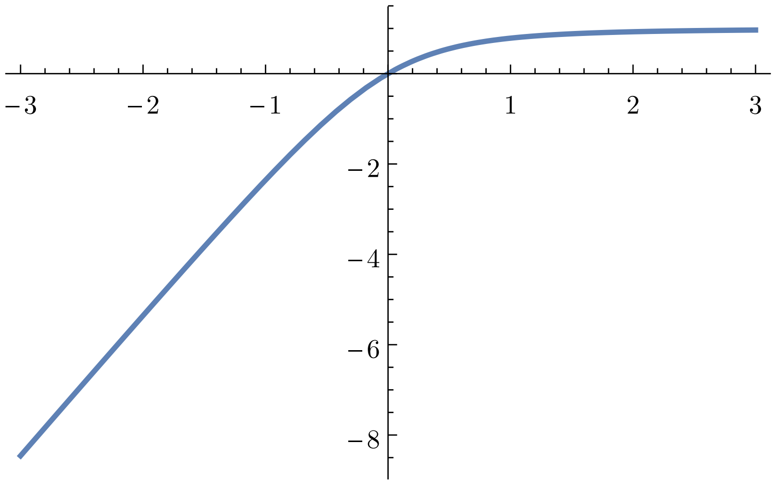
$f''$ mindenhol szigorúan negatív, tehát $f'$ szigorúan monoton csökken, másrészt $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, tehát $f'$ mindenhol szigorúan pozitív.

| | $(-\infty, \infty)$ |
|---|---|
| $f$ | $\frown$ |
| $f'$ | $+$ |
| $f''$ | $-$ |

Láttuk, hogy $+\infty$ irányában vízszintes aszimptota van,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan x = \pi \\
\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \pi x) &= \lim_{x\to-\infty} f(-x) = 1,
\end{aligned}
$$

tehát a $-\infty$ irányában létezik ferde aszimptota, egyenlete $y = \pi x + 1$. $R_f = (-\infty, 1)$, grafikon:




3. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$ függvény $x_0 = 0$ pont középpontú Taylor-sorát.

   *Megoldás.* Bővítsük a törtet az $\sqrt{x+1}-1$ különbséggel:

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$$

   A binomiális sor felhasználásával $x \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n - 1}{x} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n}{x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n+1} x^n. \end{aligned}$$

4. Hol vannnak és milyen típusúak az $f(x,y) = x^3 + 3(y^2-1)x$ függvény lokális szélsőértékei?

   *Megoldás.* A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 3x^2 + 3y^2 - 3 \\ f'_y(x,y) &= 6xy, \end{aligned}$$

   az utóbbi akkor 0, ha $x = 0$ vagy $y = 0$. Ezeket az $f'_x(x,y) = 0$ egyenletbe helyettesítve $y = \pm 1$ illetve $x = \pm 1$ adódik, tehát a lehetséges pontok $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ és $(-1,0)$.
   A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix},$$

   $\det H(x,y) = 36(x^2 - y^2)$, ennek értéke a $(0,\pm 1)$ pontban $-36$, tehát itt nyeregpontok vannak.
   A $(\pm 1, 0)$ pontokban $\det H(\pm 1, 0) = 36$, tehát ezek lokális szélsőértékhelyek, a főátlóelemek előjele alapján $(1,0)$ lokális minimumhely, $(-1,0)$ lokális maximumhely.

5. Potenciálos-e a $\mathbf{u}(x,y,z) = (3x^2y + 2z^3)\mathbf{i} + (x^3 + 4y^3)\mathbf{j} + 6xz^2\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.

   *Megoldás.* A vektormező az egész térben folytonosan differenciálható, tehát pontosan akkor potenciálos, ha a rotációja mindenhol eltűnik.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y} &= 3x^2 = \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} &= 6z^2 = \frac{\partial u_x}{\partial z}, \end{aligned}$$

tehát potencálos. Egy potenciálfüggvény

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^x 0\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (x^3+4\eta^3)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z 6x\zeta^2\,\mathrm{d}\zeta \\
&= x^3y + y^4 + 2xz^3.
\end{aligned}
$$

6. Számítsa ki az $\mathbf{r}(u,v) = u\cos(v)\mathbf{i} + u\sin(v)\mathbf{j} - \frac{v^2}{2}\mathbf{k}$ felület $\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \middle| u^2+v^2\le 1\right\}$ paramétertartománynak megfelelő darabjának a felszínét.

   *Megoldás.* A parciális deriváltak vektoriális szorzatának abszolútértéke

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| &= |(\cos v\mathbf{i}+\sin v\mathbf{j})\times(-u\sin v\mathbf{i}+u\cos v\mathbf{j}-v\mathbf{k})| \\
&= |-v\sin v\mathbf{i}+v\cos v\mathbf{j}+u\mathbf{k}| \\
&= \sqrt{u^2+v^2}.
\end{aligned}
$$

   Térjünk át $u = r\cos\phi$, $v = r\sin\phi$ polárkoordinátákra, a Jacobi-determináns $r$, a paramétertartomány $[0,1]\times[0,2\pi]$. A felszín

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_{u^2+v^2\le 1}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \iint_{u^2+v^2\le 1}\sqrt{u^2+v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

7. Oldja meg az $y''+4y'+3y = e^{-2x}$ differenciálegyenletet $y(0)=0$, $y'(0)=0$ kezdeti feltétel mellett.

   *Megoldás.* Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+4\lambda+3 = (\lambda+1)(\lambda+3)$, tehát a gyökök $-1$ és $-3$. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x}+Be^{-3x}$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = Ce^{-2x}$ alakban. A deriváltak

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= -2Ce^{-2x} \\
y''(x) &= 4Ce^{-2x},
\end{aligned}
$$

   az egyenletbe behelyettesítve

$$
(4+4(-2)+3)Ce^{-2x} = e^{-2x}
$$

   adódik, ez akkor teljesül minden $x$-re, ha $C=-1$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása és a derivált

$$
\begin{aligned}
y(x) &= Ae^{-x}+Be^{-3x}-e^{-2x} \\
y'(x) &= -Ae^{-x}-3Be^{-3x}+2e^{-2x}.
\end{aligned}
$$

   A kezdeti feltételből

$$
\begin{aligned}
0 &= y(0) = A+B-1 \\
0 &= y'(0) = -A-3B+2,
\end{aligned}
$$

   az egyenletrendszer megoldása $A = B = \frac{1}{2}$, tehát a keresett megoldás

$$
y(x) = \frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-3x}-e^{-2x}.
$$