

Matematika szigorlat G (A3) – 2020. június 5.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = (e^{1/n} - 1) \frac{3^n}{n^2 + 2^n}$$

$$b_n = \sqrt[n]{55n^{97} - 36n^{71} + 2^{-n}}$$

2. Végezze el az $f(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$ függvény $x_0 = 0$ pont középpontú Taylor-sorát.
4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^3 + 3(y^2 - 1)x$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Potenciálos-e a $\mathbf{u}(x, y, z) = (3x^2y + 2z^3)\mathbf{i} + (x^3 + 4y^3)\mathbf{j} + 6xz^2\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.
6. Számítsa ki az $\mathbf{r}(u, v) = u \cos(v)\mathbf{i} + u \sin(v)\mathbf{j} - \frac{v^2}{2}\mathbf{k}$ felület $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$ paramétertartománynak megfelelő darabjának a felszínét.
7. Oldja meg az $y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.