Matematika szigorlat G (A3) – 2020. június 10.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = e^{x^3}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. Az exponenciális függvény szigorúan pozitív, tehát nincs zérushely. A határértékek

$$\lim_{x\to\infty} e^{x^3} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0.$$

   A deriváltak

$$f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2$$
$$f''(x) = e^{x^3} \cdot (3x^2)^2 + e^{x^3} \cdot 6x = 3e^{x^3} x(2 + 3x^3).$$

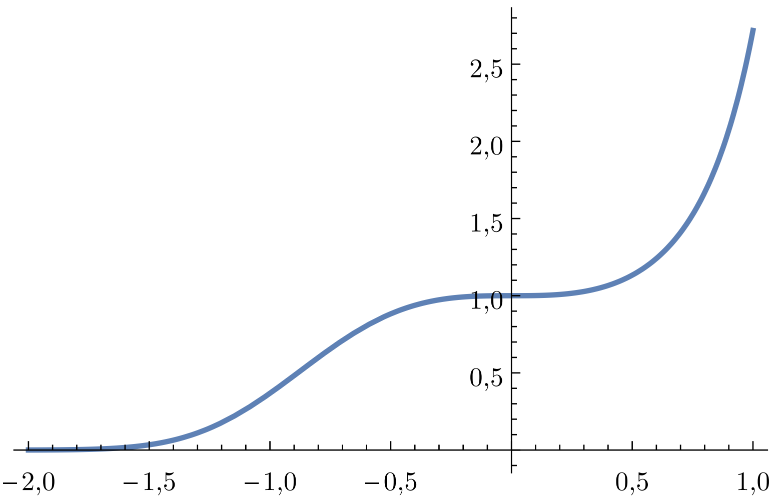
   f' zérushelye $x = 0$, máshol pozitív. f'' zérushelyei $x = 0$ és $-\sqrt[3]{2/3}$, mindkét pontban előjelet vált:

	$(-\infty, -\sqrt[3]{2/3})$	$-\sqrt[3]{2/3}$	$(-\sqrt[3]{2/3}, 0)$	0	$(0, \infty)$
f	╭	infl	╯	infl	╭
f'	$+$	$+$	$+$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$

   Láttuk, hogy $-\infty$ irányában vízszintes aszimptota van,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^3}}{x} = 0$$

   tehát $+\infty$ irányában nem létezik ferde aszimptota. $R_f = (0, \infty)$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. Először határozzunk meg egy primitív függvényt. A nevezőt irreducibilis polinomok szorzatára bontjuk: $1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$, majd az integrandust parciális törtekre.

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx + C}{1 - x + x^2}$$

   Szorozzuk meg mindkét oldalt a közös nevezővel, majd rendezzük x hatványai szerint:

$$\begin{aligned} 1 &= A(1 - x + x^2) + (Bx + C)(1 + x) \\ &= (A + B)x^2 + (-A + B + C)x + (A + C). \end{aligned}$$

A két polinom akkor egyenlő, ha az

$$\begin{aligned}
0 &= A + B\\
0 &= -A + B + C\\
1 &= A + C
\end{aligned}$$

egyenletrendszer teljesül, ebből $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$. A határozatlan integrál tehát

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{2-x}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + C.
\end{aligned}$$

Az improprius integrált ezután a Newton–Leibniz-tétellel, majd határátmenettel számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)\right]_0^b\\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{6}\ln\frac{(b+1)^2}{b^2-b+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2b-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{0-1}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}x^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

   Megoldás. A Cauchy–Hadamard-tétel segítségével meghatározzuk a konvergenciasugarat:

   $$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-\sqrt{n}}} = \limsup_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

   Mivel

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{2\ln n-\sqrt{n}} = 0$$

   és $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$, a majoránskritérium alapján az $x = \pm 1$ pontokban abszolút konvergens a sor. A hatványsor konvergenciatartománya tehát $[-1, 1]$.

4. Határozza meg az A^{2020} mátrixot.

   $$A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ -10 & -8 & 3\end{bmatrix}$$

   Megoldás. Ha $A = SDS^{-1}$ valamely S invertálható mátrixszal, akkor $A^{2020} = SDS^{-1}SDS^{-1}\cdots SDS^{-1} = SD^{2020}S^{-1}$. A hatványt akkor lehet könnyen számolni, ha D egyszerű alakú, például diagonális. Határozzuk meg A sajátértékeit. A karakterisztikus polinom

   $$\begin{aligned}
   \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & -5 & 3\\ 1 & 2-\lambda & -2\\ -10 & -8 & 3-\lambda\end{vmatrix}\\
   &= (-5-\lambda)\left((2-\lambda)(3-\lambda)-(-2)(-8)\right) - (-5)\left(1\cdot(3-\lambda)-(-2)(-10)\right)\\
   &\quad + 3\left(1\cdot(-8)-(2-\lambda)(-10)\right)\\
   &= 1-\lambda^3,
   \end{aligned}$$

   tehát a sajátértékek éppen a harmadik egységgyökök. Mivel három különböző sajátérték van, D választható diagonálisnak (az átló elemei ekkor éppen a sajátértékek). $D^3 = I$ miatt $D^{2020} = (D^3)^{673}\cdot D = D$, tehát $A^{2020} = A$.

5. Határozza meg az $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$ görbe $t \in [-1, 1]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának tömegközéppontját.

   Megoldás. A tömegközéppont kiszámításához integrálni kell a koordinátafüggvényeket a görbén és a kapott értékeket elosztani az ívhosszal. Ezekhez szükség van a derivált abszolútértékére:

   $$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = |e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t} = 2\cosh t.$$

   A szükséges integrálok

   $$\begin{aligned}
   \int_{-1}^{1} 2\cosh t \,\mathrm{d}t &= [2\sinh t]_{-1}^{1} = 4\sinh 1 \\
   \int_{-1}^{1} e^t \cdot 2\cosh t \,\mathrm{d}t &= \left[\frac{e^{2t}}{2} + t\right]_{-1}^{1} = 2 + \sinh 2 \\
   \int_{-1}^{1} e^{-t} \cdot 2\cosh t \,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{e^{-2t}}{2} + t\right]_{-1}^{1} = 2 + \sinh 2 \\
   \int_{-1}^{1} \sqrt{2}t \cdot 2\cosh t \,\mathrm{d}t &= \left[2\sqrt{2}t\sinh t - 2\sqrt{2}\cosh t\right]_{-1}^{1} = 0,
   \end{aligned}$$

   tehát a tömegközéppont helye $\dfrac{2+\sinh 2}{4\sinh 1}\mathbf{i} + \dfrac{2+\sinh 2}{4\sinh 1}\mathbf{j}$.

6. Határozza meg az $\mathbf{u}(x, y, z) = (2y^2z - 3xz^2)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + (2xy^2 + z^3)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $|x| + |y| + |z| = 1$ egyenletű felületen kifelé (az origótól távolodó irányba mutató) irányítás szerint.

   Megoldás. Zárt felületen integrálunk egy mindenhol folytonosan differenciálható vektormezőt, így alkalmazható a Gauss–Osztrogradszkij-tétel. A vektormező divergenciája

   $$\operatorname{div}\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{\partial(2y^2z - 3xz^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial(2xy^2 + z^3)}{\partial z} = -3z^2 + x^2 + 3z^2 = x^2.$$

   Az integrálási tartomány és az integrandus is szimmetrikus a koordinátasíkokra nézve, tehát elég az egyik térnyolcadba eső részen integrálni, a teljes integrál ennek nyolcszorosa. A keresett integrál

   $$\begin{aligned}
   I &= \int_{-1}^{1}\int_{-(1-|x|)}^{1-|x|}\int_{-(1-|x|-|y|)}^{1-|x|-|y|} x^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
   &= 8\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
   &= 8\int_0^1\int_0^{1-x} x^2(1 - x - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
   &= 8\int_0^1 x^2\left((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\right)\mathrm{d}x \\
   &= 4\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x \\
   &= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{15}.
   \end{aligned}$$

7. Oldja meg a $3x^2 - 2xy - 2xy^3 - (1 + x^2)(1 + 3y^2)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(4) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú, ahol $P(x, y) = 3x^2 - 2xy - 2xy^3$ és $Q(x, y) = -(1 + x^2)(1 + 3y^2)$, ezekre

   $$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

   teljesül, tehát az egyenlet egzakt. Egy potenciál

   $$\begin{aligned}
   u(x, y) &= \int_0^x 3\xi^2\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (-1 - x^2)(1 + 3\eta^2)\,\mathrm{d}\eta \\
   &= x^3 - (1 + x^2)(y + y^3),
   \end{aligned}$$

   tehát az általános megoldás implicit alakja $u(x, y(x)) = x^3 - (1 + x^2)(y(x) + y(x)^3) = C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ paraméter. A kezdeti feltétel alapján

   $$C = u(4, y(4)) = u(4, 0) = 64.$$