Matematika szigorlat G (A3) – 2020. június 17.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = n^2 \left(\sqrt{\cos \frac{1}{n}} - 1 \right)$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt{\cos(1/n)} - 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\cos(1/n) - 1}{\sqrt{\cos(1/n)} + 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\cos^2(1/n) - 1}{(\sqrt{\cos(1/n)} + 1)(\cos(1/n) + 1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{\sin(1/n)}{1/n} \right)^2 \frac{1}{(\sqrt{\cos(1/n)} + 1)(\cos(1/n) + 1)} = -\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

mivel $\frac{1}{n} \to 0$ és $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1.
\end{aligned}$$

2. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{2+x^2}}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. Zérushely: $x + 2 = 0$, azaz $x = -2$. Határértékek:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x^2} + 1}} = \pm 1.$$

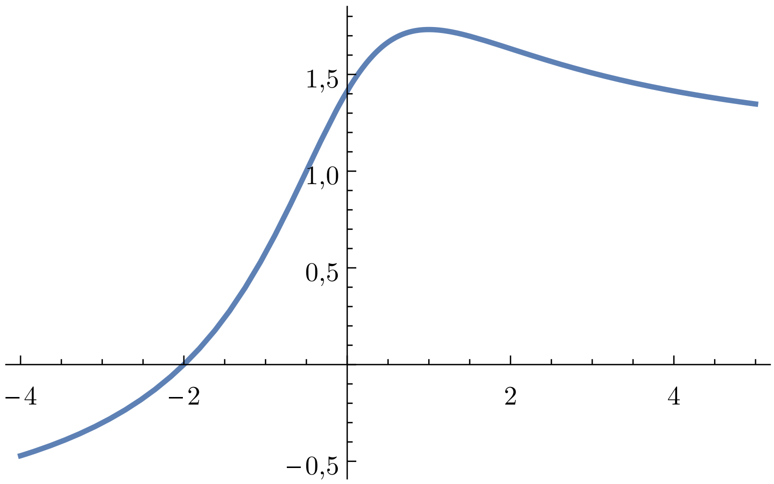
A deriváltak

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{2+x^2} - (x+2)\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}}{2+x^2} = \frac{2(1-x)}{(2+x^2)^{3/2}} \\
f''(x) &= \frac{-2(2+x^2)^{3/2} - 2(1-x)\frac{3}{2}(2+x^2)^{1/2} \cdot 2x}{(2+x^2)^3} = \frac{2(2x^2 - 3x - 2)}{(2+x^2)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

f' zérushelye 1, f'' zérushelyei $-\frac{1}{2}$ és 2. Az előjeleket az alábbi táblázat foglalja össze:

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$
f		infl		max		infl	
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Láttuk, hogy mindkét irányában vízszintes aszimptota van. $R_f = (-1, f(1)] = (-1, \sqrt{3}]$, grafikon:



3. Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+1}$ sor összegfüggvényét.

   Megoldás. Legyen az összegfüggvény f. A konvergenciatartományon belül a hatványsort tagonként lehet deriválni, tehát

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2} \\ &= \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

   Ebből integrálással kapjuk, hogy

$$x^2 f(x) = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x = x - \arctan x + C,$$

   a két oldalt az $x = 0$ pontban összevetve adódik, hogy $C = 0$. Tehát

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \arctan x}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

4. Számítsa ki az alábbi integrál értékét.

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. Az integrálási tartomány kör, emiatt érdemes polárkoordinátákra áttérni: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, a Jacobi-determináns r, a paramétertartomány $[0,1] \times [0, 2\pi]$. Az integrál

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2\phi \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^1 r^3 \,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \,\mathrm{d}\phi \\ &= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y) = -\frac{y}{x^2 - y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 - y^2}\mathbf{j}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(t) = \cosh(t)\mathbf{i} + \sinh(t)\mathbf{j}$ görbe $t \in [-1, 1]$ paraméterértékeknek megfelelő darabján.

   Megoldás. A görbe paraméterezésének deriváltja

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \sinh(t)\mathbf{i} + \cosh(t)\mathbf{j}$$

A vektormező értéke a görbén

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) = -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t - \sinh^2 t}\mathbf{i} + \frac{\cosh t}{\cosh^2 t - \sinh^2 t}\mathbf{j} = -\sinh(t)\mathbf{i} + \cosh(t)\mathbf{j}.$$

Az integrál

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{-1}^{1} \mathbf{u}(\mathbf{r}(t))\cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} (-\sinh^2 t + \cosh^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t = 2.\end{aligned}$$

6. Határozza meg az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq x$, $0 \leq y$, $0 \leq z$ egyenlőtlenség-rendszer által meghatározott alakzat tömegközéppontját.

   Megoldás. Az alakzat az origó középpontú egységgömb első térnyolcadba eső része, tehát a tömegközéppont az $x = y = z$ egyenesen van. A koordináták meghatározásához az elsőrendű nyomatékokat kell a térfogattal elosztani, ezek kiszámításához használjunk gömbi koordinátákat. $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta$, a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$. Az integrálok

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r\sin\vartheta\cos\varphi r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r =$$

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r\sin\vartheta\sin\varphi r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r =$$

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r\cos\vartheta r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2\vartheta}{2}\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{16}$$

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{6},$$

   tehát a tömegközéppont helye $\frac{3}{8}\mathbf{i} + \frac{3}{8}\mathbf{j} + \frac{3}{8}\mathbf{k}$.

7. Határozza meg az $x(x+1)y' = 1 + e^y$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. A differenciálegyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{1+e^y} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

   A bal oldal integrálásához $t = e^{y(x)}$, $\mathrm{d}t = e^{y(x)}y'(x)\,\mathrm{d}x$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned}\int \frac{y'(x)}{1+e^{y(x)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln t - \ln(t+1) + C_1.\end{aligned}$$

   Itt a második lépésben parciális törtekre bontottunk:

$$\frac{1}{1+t}\frac{1}{t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\left(A(1+t) + Bt\right) = \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\left((A+B)t + A\right),$$

   amiből $A = 1$, $B = -A = -1$.
   A másik oldal ugyanez az integrál:

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \ln x - \ln(x+1) + C_2.$$

   A két oldal egyenlőségéből

$$\ln\frac{t}{t+1} = \ln\frac{x}{x+1} + C$$

   következik, tehát az általános megoldás

$$y(x) = \ln t = \ln\frac{e^C x}{e^C x - 1 - x}.$$