Matematika szigorlat G (A3) – 2020. június 26.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{3^n + n(1+\sin n)^n - 15n^{\ln n}}{\sqrt{n^5+n^2+7} - 2^n}$$
$$b_n = (n-5)\ln\left(1+\frac{3}{n^2+2n}\right)$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n(1+\sin n)^n - 15n^{\ln n}}{\sqrt{n^5+n^2+7} - 2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} \frac{1 + n(\frac{1+\sin n}{3})^n - 15e^{\ln^2 n - n\ln 3}}{\sqrt{1+n^{-3}+7n^{-5}}n^{5/2}2^{-n} - 1} = -\infty,\end{aligned}$$

mivel $0 \le \frac{1+\sin n}{3} \le \frac{2}{3} < 1$ és így $n(\frac{1+\sin n}{3})^n \to 0$, valamint $\ln^2 n \ll n$ és $n^{5/2} \ll 2^n$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} (n-5)\ln\left(1+\frac{3}{n^2+2n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-5}{n^2+2n} \ln\left(1+\frac{3}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1-\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}} \ln\left(1+\frac{3}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n} = 0,\end{aligned}$$

mivel $\left(1+\frac{3}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n} \to e$, ln folytonos és $1/n \to 0$.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. A primitív függvény meghatározásához először parciális integrálást alkalmazunk:

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\arctan x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Az új integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(1+x^2)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \\ 1 &= A(1+x^2) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A,\end{aligned}$$

a két polinom akkor egyenlő, ha $A = 1$, $B = -1$ és $C = 0$. A primitív függvény így

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

Az improprius integrál

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{x^{-2}+1}\right]_1^b = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

3. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \in [-\pi/4, \pi/4] \\ 0 & \text{ha } x \in [-\pi, \pi/4) \cup (\pi/4, \pi) \end{cases}$$

függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát.

Megoldás. A függvény páratlan, tehát a Fourier-sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

alakú, ahol

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\sin nx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} -\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= -\frac{\cos n\frac{\pi}{4}}{2n} + \frac{2}{\pi}\frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n^2}.
\end{aligned}$$

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 6 \\ -4 & -\lambda & -4 \\ -8 & 2 & -7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (7-\lambda)\left(-\lambda(-7-\lambda) - (-4)\cdot 2\right) - (-2)\left((-4)\cdot(-7-\lambda) - (-4)\cdot 2\right) \\
&\quad + 6\left(-4\cdot 2 - (-\lambda)(-8)\right) \\
&= \lambda - \lambda^3 = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda),
\end{aligned}$$

tehát a sajátértékek 0 és ± 1. A különböző sajátértékek száma megegyezik a dimenzióval, tehát létezik sajátvektorokból álló bázis.
A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ nullvektortól különböző többszörösei.
A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ -4 & -1 & -4 \\ -8 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ -4 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ nullvektortól különböző többszörösei.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ -4 & 1 & -4 \\ -8 & 2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T$ nullvektortól különböző többszörösei.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = \ln(t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ görbe $t \in [1, e]$ paraméterértékekenek megfelelő darabjának ívhosszát.
Megoldás. A derivált abszolútértéke

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \left|\frac{1}{t}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}\right| = \sqrt{t^{-2} + 4 + 4t^2} = \sqrt{\frac{(1+2t^2)^2}{t^2}} = 2t + \frac{1}{t}.$$

Az ívhossz

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_1^e \left(2t + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[t^2 + \ln t\right]_1^e \\ &= (e^2 + 1) - (1 + 0) = e^2. \end{aligned}$$

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + y^2)(x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ felület $z \geq 0$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

   Megoldás. Az alakzat egy gömbfelszín fele, egy paraméterezés $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}$, a paramétertartomány $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. A parciális deriváltak vektoriális szorzata

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= (\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \cos\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} - \sin\vartheta\mathbf{k}) \times (-\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{j}) \\ &= \sin\vartheta(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}). \end{aligned}$$

   A vektormező értéke a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) = \sin^2\vartheta(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} - \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}),$$

   tehát az integrál

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta\right) \sin^3\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta + 2\cos^2\vartheta\right) \sin^3\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta(1 - \cos^2\vartheta) \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} (\cos^2\vartheta - \cos^4\vartheta) \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi \left[-\frac{\cos^3\vartheta}{3} + \frac{\cos^5\vartheta}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

7. Oldja meg az $y'' - 2y' + 10y = e^x$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet lineáris állandó együtthatós inhomogén, először a homogén egyenlete oldjuk meg. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, ennek gyökei $\lambda_\pm = 1 \pm 3i$, a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^x\cos 3x + Be^x\sin 3x$.

   Az inhomogén tag exponenciális, nincs külső rezonancia, egy megoldást kereshetünk Ce^x alakban. Behelyettesítve

$$Ce^x - 2Ce^x + 10Ce^x = e^x,$$

   azaz $9C = 1$, $C = \frac{1}{9}$. Az általános megoldás és deriváltja

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{9}e^x + Ae^x\cos 3x + Be^x\sin 3x \\ y'(x) &= \frac{1}{9}e^x + Ae^x\cos 3x - 3Ae^x\sin 3x + Be^x\sin 3x + 3Be^x\cos 3x, \end{aligned}$$

   a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = \frac{1}{9} + A \\ 0 &= y'(0) = \frac{1}{9} + A + 3B, \end{aligned}$$

   tehát $A = \frac{8}{9}$, $B = -\frac{1}{3}$. A keresett megoldás

$$y(x) = \frac{1}{9}e^x + \frac{8}{9}e^x\cos 3x - \frac{1}{3}e^x\sin 3x.$$