Matematika szigorlat G (A3) – 2020. június 26.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{3^n + n(1+\sin n)^n - 15n^{\ln n}}{\sqrt{n^5+n^2+7} - 2^n}$$
$$b_n = (n-5)\ln\left(1 + \frac{3}{n^2+2n}\right)$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

3. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \in [-\pi/4, \pi/4] \\ 0 & \text{ha } x \in [-\pi, \pi/4) \cup (\pi/4, \pi) \end{cases}$$

   függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát.

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = \ln(t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ görbe $t \in [1, e]$ paraméterértékekenek megfelelő darabjának ívhosszát.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^2+y^2)(x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ vektormezőt az $x^2+y^2+z^2 = 1$ felület $z \geq 0$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.
7. Oldja meg az $y'' - 2y' + 10y = e^x$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.