Matematika szigorlat G (A3) – 2020. november 11.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n^2 + n \arctan n} - n$$

$$b_n = \frac{\ln n - \frac{9}{n} + \ln \sqrt{n}}{7 + 2^{-n} + \ln(n^3)}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n\arctan n} - n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n\arctan n - n^2}{\sqrt{n^2 + n\arctan n} + n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}\arctan n} + 1} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n - \frac{9}{n} + \ln \sqrt{n}}{7 + 2^{-n} + \ln(n^3)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{n \ln n}}{\frac{7}{\ln n} + \frac{2^{-n}}{\ln n} + 3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, páros, nem periodikus. Zérushely: $x^2 = 0$, azaz $x = 0$. Határértékek:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1+x^4} = 0.$$

A deriváltak

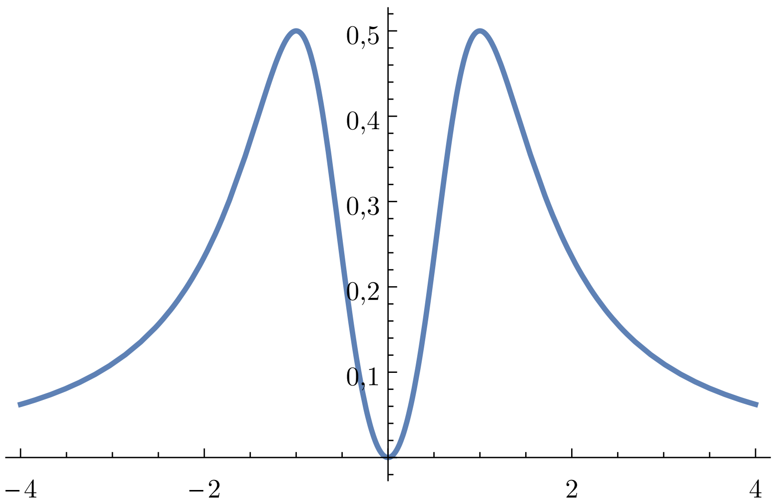
$$f'(x) = \frac{2x(1+x^4) - x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = 2\frac{x - x^5}{(1+x^4)^2}$$

$$f''(x) = 2\frac{(1-5x^4)(1+x^4)^2 - (x-x^5)\cdot 2(1+x^4)\cdot 4x^3}{(1+x^4)^4} = 2\frac{3x^8 - 12x^4 + 1}{(1+x^4)^3}.$$

f' zérushelyei 0 és ± 1, f'' zérushelyei $\pm\left(2 + \frac{\sqrt{33}}{3}\right)$ és $\pm\left(2 - \frac{\sqrt{33}}{3}\right)$. Az előjeleket $x \geq 0$ esetén az alábbi táblázat foglalja össze:

	0	$(0, 2-\frac{\sqrt{33}}{3})$	$2-\frac{\sqrt{33}}{3}$	$(2-\frac{\sqrt{33}}{3}, 1)$	1	$(1, 2+\frac{\sqrt{33}}{3})$	$2+\frac{\sqrt{33}}{3}$	$(2+\frac{\sqrt{33}}{3}, \infty)$
f	min		infl		max		infl	
f'	0	+	+	+	0	−	−	−
f''	+	+	0	−	−	−	0	+

Láttuk, hogy mindkét irányában vízszintes aszimptota van. $R_f = [0, \frac{1}{2}]$, grafikon:



3. Határozza meg az A mátrix egész sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 9 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 1 \\ 9 & -4-\lambda & 8 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left((-4-\lambda)(-\lambda) - 8 \cdot 4\right) - 9\left(-4(-\lambda) - 4\right) \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4. \end{aligned}$$

A lehetséges egész gyökök 4 osztói közül kerülnek ki, behelyettesítéssel illetve polinomosztással látható, hogy $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$, tehát a sajátértékek 1 és -2.
A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 9 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 9 & -5 & 8 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 36 & 0 & 27 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$ nullvektortól különböző többszörösei.
A $\lambda = -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 9 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ nullvektortól különböző többszörösei. Mivel a $\lambda = -2$ sajátérték algebrai multiplicitása 2, de csak egy lineárisan független sajátvektor tartozik hozzá, nem létezik sajátvektorokból álló bázis.

4. Számítsa ki az alábbi integrál értékét.

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Megoldás. e^{x^2} primitív függvénye nem elemi függvény, emiatt az integrálok felcserélésével próbálkozunk. Az integrálási tartomány

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le y \le 1, y \le x \le 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\right\},$$

tehát

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x e^{x^2} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

5. Hol van a tömegközéppontja annak a homogén tömegeloszlású vékony drótnak, aminek alakját az $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\sin t^2\mathbf{j} + t\cos t^2\mathbf{k}$ görbe $t \in [0, \sqrt{\pi}]$ darabja írja le?

Megoldás. A tömegközéppont komponensei az elsőrendű nyomatékok és az ívhossz hányadosai. A paraméterezés deriváltjának abszolútértéke

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \left|2t\mathbf{i} + \left(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2\right)\mathbf{j} + \left(\cos t^2 - 2t^2\sin t^2\right)\mathbf{k}\right| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 1 + 2t^2.$$

A szükséges integrálok

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} (1+2t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi} + \frac{2}{3}\pi^{3/2}$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} t^2(1+2t^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{3}\pi^{3/2} + \frac{2}{5}\pi^{5/2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} t\sin t^2(1+2t^2)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2}\cos t^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} + \left[-t^2\cos t^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} (-2t\cos t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos t^2 - t^2\cos t^2 + \sin t^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1+\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} t\cos t^2(1+2t^2)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\sin t^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} + \left[t^2\sin t^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} 2t\sin t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin t^2 + t^2\sin t^2 + \cos t^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} = -2\end{aligned}$$

A tömegközéppont helye

$$\frac{\frac{\pi^{3/2}}{3} + \frac{2\pi^{5/2}}{5}}{\sqrt{\pi} + \frac{2\pi^{3/2}}{3}}\mathbf{i} + \frac{1+\pi}{\sqrt{\pi} + \frac{2\pi^{3/2}}{3}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{\pi} + \frac{2\pi^{3/2}}{3}}\mathbf{k}.$$

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2+y^2=4$ egyenletű felület $0 \le 2z \le 2+x$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

Megoldás. A felület egy paraméterezése $\mathbf{r}(\phi,z) = 2\cos\phi\mathbf{i} + 2\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\phi \in [0,2\pi]$, $0 \le z \le 1+\cos\phi$. A normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (-2\sin\phi\mathbf{i} + 2\cos\phi\mathbf{j}) \times \mathbf{k} = 2\cos\phi\mathbf{i} + 2\sin\phi\mathbf{j},$$

ez kifelé mutat. A vektormező értéke a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\phi,z)) = 4z\sin^2\phi\mathbf{i} + 4z\cos^2\phi\mathbf{j} + 4z\sin\phi\cos\phi\mathbf{k}.$$

Az integrál ezek alapján

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\phi} 8z(\cos\phi\sin^2\phi + \cos^2\phi\sin\phi)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi \\ &= 4\int_0^{2\pi} (1+\cos\phi)^2(\cos\phi\sin^2\phi + \cos^2\phi\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi \\ &= 4\int_0^{2\pi} (\cos\phi\sin^2\phi + 2\cos^2\phi\sin^2\phi + \cos^3\phi\sin^2\phi + \cos^2\phi\sin\phi + 2\cos^3\phi\sin\phi + \cos^4\phi\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi \\ &= 8\int_0^{2\pi} \cos^2\phi\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = 8\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\phi}{2}\frac{1-\cos 2\phi}{2}\,\mathrm{d}\phi \\ &= 2\int_0^{2\pi} (1-\cos^2 2\phi)\,\mathrm{d}\phi \\ &= 2\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1+\cos 4\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi = 2\pi.\end{aligned}$$

7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 5y = xe^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet lineáris állandó együtthatós inhomogén, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, ennek gyökei $\lambda_\pm = -2 \pm i$, a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x$.
Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, nincs külső rezonancia, egy megoldást kereshetünk $(C_0 + C_1x)e^{-x}$ alakban. Behelyettesítve

$$(C_0 - 2C_1 + C_1x)e^{-x} + 4(-C_0 + C_1 - C_1x)e^{-x} + 5(C_0 + C_1x)e^{-x} = xe^{-x},$$

azaz $(2C_0 + 2C_1 + 2C_1x)e^{-x} = xe^{-x}$. Ebből $C_1 = \frac{1}{2}$ és $C_0 = -\frac{1}{2}$ adódik, tehát az általános megoldás

$$y(x) = \frac{x-1}{2}e^{-x} + Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x.$$