

**Matematika szigorlat G (A3) – 2020. november 11.**

Feladatok ( $7 \times 10 = 70$  pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n^2 + n \arctan n} - n$$

$$b_n = \frac{\ln n - \frac{9}{n} + \ln \sqrt{n}}{7 + 2^{-n} + \ln(n^3)}$$

2. Végezze el az  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$  függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg az  $A$  mátrix egész sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ( $\mathbb{C}$  felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 9 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Számítsa ki az alábbi integrál értékét.

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$$

5. Hol van a tömegközéppontja annak a homogén tömegeloszlású vékony drótnak, aminek alakját az  $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t \sin t^2\mathbf{j} + t \cos t^2\mathbf{k}$  görbe  $t \in [0, \sqrt{\pi}]$  darabja írja le?
6. Integrálja az  $\mathbf{u}(x, y, z) = y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$  vektormezőt az  $x^2 + y^2 = 4$  egyenletű felület  $0 \leq 2z \leq 2 + x$  darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.
7. Határozza meg az  $y'' + 4y' + 5y = xe^{-x}$  differenciálegyenlet általános megoldását.