Matematika szigorlat G (A3) – 2020. november 18.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$
$$b_n = \left(\frac{n^3+2n}{n^3-3n+1}\right)^{3n^2}$$

Megoldás. Az első kifejezés számlálóját és nevezőjét is gyöktelenítjük:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1-2n}{n+1-n}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+2n}{n^3-3n+1}\right)^{3n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5n-1}{n^3-3n+1}\right)^{3n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{5n-1}{n^3-3n+1}\right)^{\frac{n^3-3n+1}{5n-1}}\right]^{\frac{(3n^2)(5n-1)}{n^3-3n+1}} = e^{15}.
\end{aligned}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált. (Útmutatás: alkalmazzon $u = \sqrt{e^x-1}$ helyettesítést.)

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. A javasolt helyettesítéssel $x = \ln(u^2+1)$, $\mathrm{d}x = \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$, tehát a primitív függvény

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{u}\frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\arctan u = 2\arctan\sqrt{e^x-1}+C.
\end{aligned}$$

Az integrál improprius: egyrészt az integrálási tartomány nem korlátos, másrészt 0-ban az integrandus végtelenhez tart, tehát kettébontjuk az integrált.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to0+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to0+}\left[2\arctan\sqrt{e^x-1}\right]_a^1 + \lim_{b\to\infty}\left[2\arctan\sqrt{e^x-1}\right]_1^b \\
&= \lim_{a\to0+}\left(2\arctan\sqrt{e-1}-2\arctan\sqrt{e^a-1}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(2\arctan\sqrt{e^b-1}-2\arctan\sqrt{e-1}\right) \\
&= -2\lim_{a\to0+}\arctan\sqrt{e^a-1}+2\lim_{b\to\infty}\arctan\sqrt{e^b-1} = \pi.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény $x_0 = 1$ pont középpontú Taylor-sorát.

Megoldás. Felhasználjuk a mértani sorra vonatkozó $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ $(q \in (-1,1))$ egyenlőséget $q = -(x-1)$ választással:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-(-(x-1))} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}(-(x-1))^n \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} n(-(x-1))^{n-1}\cdot(-1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n (x-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

4. Hol vannnak és milyen típusúak az $f(x,y) = x^2(2-y^2) + y^2(2-x^2)$ függvény lokális szélsőértékei?

   Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= 2x(2-y^2) - 2xy^2 = 4x(1-y)(1+y) \\
f'_y(x,y) &= -2yx^2 + 2y(2-x^2) = 4y(1-x)(1+x),
\end{aligned}$$

   tehát a közös zérushelyek $(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-4y^2 & -8xy \\ -8xy & 4-4x^2 \end{bmatrix},$$

   $\det H(x,y) = -48x^2y^2 - 16(x^2+y^2) + 16$, ennek értéke az origóban 16, tehát itt lokális szélsőérték van, a többi pontban -64, ezek nyeregpontok. $H(0,0)$ az egységmátrix 4-szerese, tehát pozitív definit, itt lokális minimumhely van.

5. Határozza meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^3+y^3)\mathbf{i} + (x^3+z^3)\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2+y^2+z^2 = 1$ egyenletű felületen kifelé (az origótól távolodó irányba mutató) irányítás szerint.

   Megoldás. Zárt felületen integrálunk egy mindenhol folytonosan differenciálható vektormezőt, így alkalmazható a Gauss–Osztrogradszkij-tétel. A vektormező divergenciája

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial x} + \frac{\partial(x^3+z^3)}{\partial y} + \frac{\partial x^2 y}{\partial z} = 3x^2.$$

   Az integrálási tartományt gömbi koordinátákkal érdemes paraméterezni, $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta\mathbf{k}$, a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3(r\sin\vartheta\cos\varphi)^2 r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 3\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{3}{5}\pi\int_0^{\pi}\left(\sin\vartheta - \cos^2\vartheta\sin\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{3}{5}\pi\left[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{5}\pi.
\end{aligned}$$

6. Oldja meg az $y' + 2xy = -6x^2 + 2x - 3$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = -2x,$$

amiből integrálással $y_h(x) = Ce^{-x^2}$ adódik.
Az inhomogén egyenlet megoldását az állandó variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)e^{-x^2}$ alakban keressük, az egyenletbe helyettesítve

$$c'(x)e^{-x^2} + c(x)\left[(e^{-x^2})' + 2xe^{-x^2}\right] = -6x^2 + 2x - 3,$$

tehát

$$\begin{aligned}
c(x) &= \int (-6x^2 + 2x - 3)e^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \underbrace{3x}_{f}\underbrace{(2xe^{x^2})}_{g'}\,\mathrm{d}x + \int (2x-3)e^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left(3xe^{x^2} - \int 3e^{x^2}\,\mathrm{d}x\right) + \int (2x-3)e^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -3xe^{x^2} + \int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -3xe^{x^2} + e^{x^2} + C.
\end{aligned}$$

Az általános megoldás tehát

$$y(x) = 1 - 3x + Ce^{-x^2},$$

a kezdeti feltétel alapján $0 = y(0) = 1 + C$, tehát $C = -1$.

7. Melyik függvény Laplace-transzformáltja az $F(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 3}{(z-1)^3}$ függvény?

Megoldás. Parciális törtekre bontunk:

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{(z-1)^3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)^3},$$

az együtthatók meghatározásához szorozzuk meg mindkét oldalt a közös nevezővel.

$$z^2 - 2z + 3 = A(z-1)^2 + B(z-1) + C = Az^2 + (-2A + B)z + (A - B + C)$$

akkor azonosság, ha

$$\begin{aligned}
1 &= A \\
-2 &= -2A + B \\
3 &= A - B - C,
\end{aligned}$$

amiből $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$ adódik, tehát

$$F(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^3}.$$

Az első tag táblázat szerint e^x Laplace-transzformáltja, a második tagot vissza lehet ilyenre vezetni:

$$F(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\frac{1}{(z-1)^2}\right) = \frac{1}{z-1} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{z-1},$$

tehát F az $e^x + x^2e^x$ Laplace-transzformáltja.