

Matematika szigorlat G (A3) – 2020. november 18.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$
$$b_n = \left(\frac{n^3 + 2n}{n^3 - 3n + 1} \right)^{3n^2}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált. (Útmutatás: alkalmazzon $u = \sqrt{e^x - 1}$ helyettesítést.)

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

3. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény $x_0 = 1$ pont középpontú Taylor-sorát.
4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^2(2 - y^2) + y^2(2 - x^2)$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Határozza meg az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^3 + y^3)\mathbf{i} + (x^3 + z^3)\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felületen kifelé (az origótól távolodó irányba mutató) irányítás szerint.
6. Oldja meg az $y' + 2xy = -6x^2 + 2x - 3$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.
7. Melyik függvény Laplace-transzformáltja az $F(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{(z - 1)^3}$ függvény?