Matematika szigorlat G (A3) – 2020. december 17.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$$
$$b_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)\right)^{n^2}\\ &= e^{\lim_{n\to\infty} n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)} = e^{-1/2},\end{aligned}$$

felhasználva, hogy $\cos\frac{1}{n} - 1 \to 0$, $n^2 \to \infty$ és

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right) = -\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}+1} = -\frac{1}{2}$$

2. Végezze el az $f(x) = \ln(x^2+4x+5)$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $f(x) = \ln((x+2)^2+1)$, $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. A zérushely az $(x+2)^2+1 = 1$ egyenlet megoldása, azaz -2. A határértékek

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2\ln(|x|) + \ln\left(1+4\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^2}\right) = \infty.$$

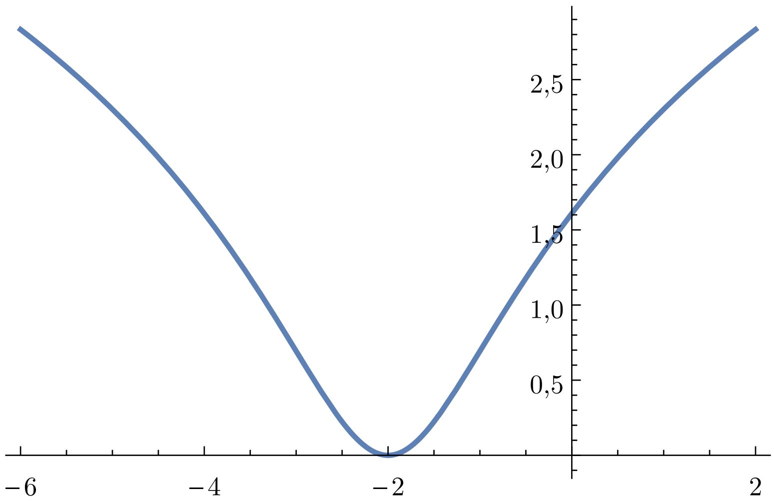
A deriváltak

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\\ f''(x) &= \frac{2(x^2+4x+5)-(2x+4)(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2} = -\frac{2(x^2+4x+3)}{(x^2+4x+5)^2}.\end{aligned}$$

f' zérushelye -2, f'' zérushelyei -3 és -1. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,\infty)$
f	⌒	infl	◡	min	◡	infl	⌒
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$

Ferde aszimpotota nincs, mivel $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ de $\lim_{x\to\pm\infty} = \infty$. $R_f = [0,\infty)$, grafikon:



3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ sor összegfüggvényét.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\end{aligned}$$

ha $|x| < 1$. Ebből integrálással

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x) + C_1,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \int (-\ln(1-x)+C_1)\,\mathrm{d}x = (1-x)\ln(1-x) + \int \frac{1-x}{1-x}\,\mathrm{d}x + C_1 x = (1-x)\ln(1-x) + x + C_1 x + C_2$$

adódik. A hatványsor nulladik és első tagja eltűnik, tehát $C_1 = C_2 = 0$ és

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)} = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

4. Számítsa ki az $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ integrált.

Megoldás. $\sqrt{1+x^3}$ primitív függvénye nem elemi függvény, emiatt az integrálok sorrendjének felcserélésével próbálkozunk. Az integrálási tartomány $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le y \le 4, \sqrt{y} \le x \le 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^2\}$, tehát

$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_0^2 3x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(1+x^3)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{1}{3}\left(18 - \frac{2}{3}\right) = \frac{52}{9}\end{aligned}$$

5. Potenciálos-e a $\mathbf{u}(x,y,z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2+1)(x^2+y^2+z^2+2)}$ vektoremező? Ha igen, adja meg egy potenciálfüggvényét.

Megoldás. A vektormező centrális, tehát létezik potenciálfüggvény (és csak az origótól mért távolságtól függ). A potenciál meghatározásához érdemes az origót kezdőpontnak választani és egyenes szakasz mentén integrálni:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^1 \mathbf{u}(tx,ty,tz)\cdot(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t(x^2+y^2+z^2)}{(t^2(x^2+y^2+z^2)+1)(t^2(x^2+y^2+z^2)+2)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Vezessük be az $r^2 = x^2+y^2+z^2$ rövid jelölést és bontsuk parciális törtekre az integrandust:

$$\frac{r^2t}{(r^2t^2+1)(r^2t^2+2)} = \frac{At+B}{r^2t^2+1} + \frac{Ct+D}{r^2t^2+2},$$

a közös nevezővel megszorozva mindkét oldalt

$$\begin{aligned} r^2t &= (At+B)(r^2t^2+2)+(Ct+D)(r^2t^2+1) \\ &= (A+C)r^2t^3+(B+D)r^2t^2+(2A+C)t+(2B+D), \end{aligned}$$

amiből $A+C=0$, $B+D=0$, $2A+C=r^2$, $2B+D=0$ és így $B=D=0$, $A=-C=r^2$ adódik, tehát

$$\frac{r^2t}{(r^2t^2+1)(r^2t^2+2)} = \frac{r^2t}{r^2t^2+1} - \frac{r^2t}{r^2t^2+2}.$$

A potenciálfüggvény így

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^1 \left(\frac{r^2t}{r^2t^2+1} - \frac{r^2t}{r^2t^2+2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(r^2t^2+1) - \frac{1}{2}\ln(r^2t^2+2)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln(r^2+1) - \frac{1}{2}\ln(r^2+2) + \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = 2x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $0 \le z \le 4-(x^2+y^2)$ egyenlőtlenségek által meghatározott alakzat felületén kifelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. Használhatjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt, ami szerint a keresett integrál egyenlő $\mathbf{u}$ divergenciájának a $0 \le z \le 4-(x^2+y^2)$ tartományon vett integráljával. $\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) = 2+1-1 = 2$, az integrált hengerkoordinákra áttérve érdemes számolni:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} 2r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\ &= 4\pi\int_0^2 (4-r^2)r\,\mathrm{d}r \\ &= 4\pi\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 16\pi. \end{aligned}$$

7. Határozza meg az $y''+4y'+3y = xe^{-2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+4\lambda+3 = (\lambda+3)(\lambda+1)$, tehát a gyökök -3 és -1. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-3x}+Be^{-x}$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = (C_0+C_1x)e^{-2x}$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned} y'(x) &= (-2C_0+C_1-2C_1x)e^{-2x} \\ y''(x) &= 4(C_0-C_1+C_1x)e^{-2x}, \end{aligned}$$

   az egyenletbe behelyettesítve

$$-(C_0+C_1x)e^{-2x} = xe^{-2x}$$

   adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $C_0 = 0$ és $C_1 = -1$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = -xe^{-2x}+Ae^{-3x}+Be^{-x}$.