Matematika szigorlat G (A3) – 2021. január 5.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{n^{20} - 10^{n-7} + n^n}{n! - e^{n^2} + \ln^{100} n}$$
$$b_n = \left(1 - \frac{\sqrt{5n+1}}{n+9}\right)^{3n+5} \sin n$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{20} - 10^{n-7} + n^n}{n! - e^{n^2} + \ln^{100} n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e^n}\right)^n \frac{n^{-n}n^{20} - n^{-n}10^{n-7} + 1}{e^{-n^2}n! - 1 + e^{-n^2}\ln^{100} n} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{5n+1}}{n+9}\right)^{3n+5} \sin n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{5n+1}}{n+9}\right)^{\frac{n+9}{\sqrt{5n+1}}}\right]^{\frac{\sqrt{5n+1}(3n+5)}{n+9}} \sin n = 0,\end{aligned}$$

mivel a szögletes zárójelen belüli kifejezés határértéke $e^{-1} \in (0,1)$, így az első tényező határértéke 0, a második tényező pedig korlátos.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{x^2+4x}{x^3 - x^2 + 4x - 4}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. A nevezőt irreducibilis tényzők szorzatára bontjuk, majd az integrandust parciális törtekre: $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x^2+4)$,

$$\begin{aligned}\frac{x^2+4x}{(x-1)(x^2+4)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \\ x^2+4x &= A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + (-B+C)x + (4A-C).\end{aligned}$$

A két polinom akkor egyenlő, ha $1 = A + B$, $4 = -B + C$ és $0 = 4A - C$, amiből $A = 1$, $B = 0$ és $C = 4$ adódik. Az integrál

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+4x}{x^3 - x^2 + 4x - 4}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1| + 2\arctan\frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

3. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x}} & \text{ha } x \ge -\frac{1}{2},\ x \ne 0 \\ 2 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát.

Megoldás. Ha $x \ge -\frac{1}{2}$, $x \ne 0$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x}} &= \frac{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+x})}{(1+2x) - (1-x)} \\ &= \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+x}.\end{aligned}$$

Az utóbbi alak $x = 0$ esetén is értelmes és ott megegyezik $f(0)$ értékével, tehát

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+x} \\ &= (1+2x)^{1/2} + (1+x)^{1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left[(2x)^n + x^n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (2^n + 1)\, x^n. \end{aligned}$$

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -3 & -\lambda & 2 \\ 3 & 1 & -\lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda-2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -\lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda+1)^2, \end{aligned}$$

tehát a sajátértékek 0 és -1, az utóbbi multiplicitása 2.
A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_3 + s_1}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2 + 3s_1 \\ s_3 - 3s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2/2 \\ s_3 \cdot (-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója kisebb mint az algebrai multiplicitás, tehát nem létezik sajátvektorokból álló bázis.

5. Határozza meg az $x^2 + y^2 \le 1$, $0 \le z \le 2 - x$ egyenlőtlenség-rendszer által meghatározott alakzat tömegközéppontját.

Megoldás. Az alakzat egy henger és két féltér metszete, hengerkoordinátákat érdemes használni: $\mathbf{r}(r, \phi, z) = r\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a Jacobi-determináns r. A paramétertartomány $r \in [0,1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $0 \le z \le 2 - r\cos\phi$. A tömegközéppont az elsőrendű nyomatékok és a térfogat hányadosa, a szükséges integrálok:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-r\cos\phi} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - r\cos\phi) r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^1 2r \,\mathrm{d}r = 2\pi \\ \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-r\cos\phi} r\cos\phi r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - r\cos\phi) r\cos\phi r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \\ &= -\pi \int_0^1 r^3 \,\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{4} \\ \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-r\cos\phi} r\sin\phi r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - r\cos\phi) r\sin\phi r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r = 0 \\ \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-r\cos\phi} zr \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - r\cos\phi)^2 r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(8r + r^3\right) \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left(4 + \frac{1}{4}\right) = \frac{17\pi}{8}. \end{aligned}$$

A tömegközéppont koordinátái: $(-\frac{1}{8}, 0, \frac{17}{16})$

6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ vektormező integrálját az origó középpontú egységgömb felületén kifelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. A gömbfelület szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}$, a kifelé mutató normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} = \sin\vartheta\, \mathbf{r}(\vartheta, \varphi),$$

   a paramétertartomány $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$. A vektormező értéke a felületen $\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) = \mathbf{r}(\vartheta)$. Az integrál

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, |\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)|\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = 4\pi.\end{aligned}$$

7. Határozza meg az $xy' + 2y = x^4$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x},$$

   amiből integrálással $\ln|y(x)| = -2\ln|x| + C$, azaz $y(x) = \frac{C}{x^2}$ adódik. Az inhomogén egyenlet megoldását az állandó variálásának módszere szerint $y(x) = \frac{c(x)}{x^2}$ alakban keressük. Behelyettesítve

$$x\left(\frac{c'(x)x^2 - c(x) \cdot 2x}{x^4} \right) + 2\frac{c(x)}{x^2} = x^4,$$

   azaz $c'(x) = x^5$, amiből integrálással $c(x) = \frac{x^6}{6} + C$. Az egyenlet általános megoldása tehát

$$y(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}.$$