

Matematika szigorlat G (A3) – 2021. január 5.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{n^{20} - 10^{n-7} + n^n}{n! - e^{n^2} + \ln^{100} n}$$
$$b_n = \left(1 - \frac{\sqrt{5n+1}}{n+9}\right)^{3n+5} \sin n$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{x^2 + 4x}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$$

3. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x}} & \text{ha } x \geq -\frac{1}{2}, x \neq 0 \\ 2 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát.

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis (\mathbb{C} felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Határozza meg az $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2 - x$ egyenlőtlenség-rendszer által meghatározott alakzat tömegközéppontját.
6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ vektormező integrálját az origó középpontú egységgömb felületén kifelé mutató irányítás mellett.
7. Határozza meg az $xy' + 2y = x^4$ differenciálegyenlet általános megoldását.