Matematika szigorlat G (A3) – 2021. január 7.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$$
$$b_n = \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-n+1}{2n}}\right]^{n\frac{2n}{n^2-n+1}} = e^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\sin\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Megjegyzés. Ezt a határértéket trigonometrikus azonosságok használata nélkül is meg lehet határozni. A Lagrange-tétel szerint létezik $\xi_n \in [\sqrt{n}, \sqrt{n+1}]$, amivel $\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\cos\xi_n$, ennek első tényezője nullához tart, a második tényező korlátos.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$
$$1 = A(x+2) + B(x+1) = (A+B)x + (2A+B).$$

A két polinom egyenlőségének feltétele

$$0 = A + B$$
$$1 = 2A + B,$$

amiből $A = 1$, $B = -1$ adódik. Az integrál

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x+1) - \ln(x+2)\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln\frac{2(b+1)}{b+2} = \ln 2.\end{aligned}$$

3. Határozza meg az $f(x) = \sinh x$ ha $x \in -[\pi, \pi)$ függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát. A $\frac{\pi}{2}$ pontbeli érték segítségével határozza meg a

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{2k^2+2k+1}$$

sorösszeget.

Megoldás. A függvény páratlan, tehát a Fourier-sor koszinuszos (és konstans) tagjai eltűnnek. A többi együttható a

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sinh(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\cosh(x)\sin(nx)\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cosh(x) n\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\cosh(x)\sin(nx) - n\sinh(x)\cos(nx)\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sinh(x) n^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-n\sinh(\pi)(-1)^n\right) - n^2 b_n
\end{aligned}$$

egyenletből átrendezéssel

$$b_n = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{n}{1+n^2}.$$

f szakaszonként folytonosan differenciálható, emiatt a Fourier-sora minden folytonossági pontjában előállítja. Speciálisan a $\pi/2$ pontban

$$\begin{aligned}
\sinh\frac{\pi}{2} &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}(-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\frac{2k+1}{4k^2+4k+2}(-1)^k \\
&= \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{2k^2+2k+1}.
\end{aligned}$$

A keresett sorösszeg ennek alapján

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{2k^2+2k+1} = \pi\frac{\sinh(\pi/2)}{\sinh(\pi)}.$$

4. Hol vannnak és milyen típusúak az $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + x^2z - z^2 + x^2$ függvény lokális szélsőértékei?

   Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y,z) &= 3x^2 + y^2 + 2xz + 2x \\
f'_y(x,y,z) &= 2xy \\
f'_z(x,y,z) &= x^2 - 2z,
\end{aligned}$$

a második akkor 0, ha $x = 0$ vagy $y = 0$. Ha $x = 0$, akkor a másik két derivált csak $y = z = 0$ esetén lesz 0, ha viszont $y = 0$, akkor $0 = f'_x(x,0,z) = x(3x+2z+2)$ alapján vagy $x = 0$ (ezt már láttuk), vagy $2z = -3x - 2$, amit a z szerinti deriváltba írva a feltétel $x^2 + 3x + 2 = 0$, azaz $x = -2$ vagy $x = -1$. Összefoglalva: a három stacionárius pont $(0,0,0)$, $(-2,0,2)$ és $(-1,0,\frac{1}{2})$.
A Hesse-mátrix

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y,z) & f''_{xy}(x,y,z) & f''_{xz}(x,y,z) \\ f''_{yx}(x,y,z) & f''_{yy}(x,y,z) & f''_{yz}(x,y,z) \\ f''_{zx}(x,y,z) & f''_{zy}(x,y,z) & f''_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x+2z+2 & 2y & 2x \\ 2y & 2x & 0 \\ 2x & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

A jobb alsó elem mindig negatív, tehát a stacionárius pontok csak nyeregpontok vagy lokális maximumok lehetnek. A $(0,0,0)$ pontban a bal felső elem pozitív, így a mátrix indefinit, tehát ez nyeregpont. A $(-1,0,\frac{1}{2})$ pontban a bal felső sarokdeterminánsok -3, 6 és $\det H(x,y,z) = -12 - (-8) = -4 < 0$, tehát az előjelek alapján a mátrix negatív definit, itt lokális maximum van. A $(-2,0,2)$ pontban a determináns $-48 - (-64) = 16 > 0$, tehát itt indefinit a mátrix, nyeregpont van.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\cos(t)\mathbf{j} + \sqrt{t}\sin(t)\mathbf{k}$ görbe $t \in [1, 16]$ paraméterértékekenek megfelelő darabjának ívhosszát.

Megoldás. A paraméterezés a megadott intervallumon folytonosan differenciálható, így az ívhossz a derivált abszolútértékének integrálja.

$$
\begin{aligned}
|\dot{\mathbf{r}}(t)| &= \left|\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos t - \sqrt{t}\sin t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t + \sqrt{t}\cos t\right)\mathbf{k}\right| \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\cos t - \sqrt{t}\sin t\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t + \sqrt{t}\cos t\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{4t} + t} \\
&= \frac{1+2t}{2\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{2}t^{-1/2} + \sqrt{t}.
\end{aligned}
$$

Az ívhossz

$$
I = \int_1^{16} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_1^{16} \left(\frac{1}{2}t^{-1/2} + \sqrt{t}\right)\mathrm{d}t = \left[\sqrt{t} + \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^{16} = 45.
$$

6. Oldja meg a $x^3 + 3xy^2 + (3x^2y + y^3)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(1) = -1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú, ahol

$$
\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x^3 + 3xy^2)}{\partial y} = 6xy = \frac{\partial(3x^2y + y^3)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x},
$$

tehát egzakt. Egy potenciál

$$
u(x,y) = \int_0^x \xi^3\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (3x^2\eta + \eta^3)\,\mathrm{d}\eta = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4},
$$

ezzel az általános megoldás $u(x, y(x)) = C$. A kezdeti feltétel alapján $C = u(1, y(1)) = u(1, -1) = 2$, a kezdetiérték-probléma megoldásának megfelelő ág

$$
y(x) = -\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{x^4+1} - 3x^2}.
$$

7. Oldja meg az $y'' + y' - 2y = x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1)$, tehát a gyökök -2 és 1. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x} + Be^x$.

Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = C_0 + C_1x$ alakban. A deriváltak

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= C_1 \\
y''(x) &= 0,
\end{aligned}
$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$
-2C_0 + C_1 - 2C_1x = x
$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $-2C_0 + C_1 = 0$ és $-2C_1 = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $C_0 = -\frac{1}{4}$, $C_1 = -\frac{1}{2}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása és deriváltja

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + Ae^{-2x} + Be^x \\
y'(x) &= -\frac{1}{2} - 2Ae^{-2x} + Be^x
\end{aligned}
$$

A kezdeti feltétel $0 = y(0) = -\frac{1}{4} + A + B$ és $0 = y'(0) = -\frac{1}{2} - 2A + B$, amiből $A = -\frac{1}{12}$ és $B = \frac{1}{3}$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $y(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$.