

Matematika szigorlat G (A3) – 2021. január 7.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)^n$$

$$b_n = \sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

3. Határozza meg az $f(x) = \sinh x$ ha $x \in -[\pi, \pi]$ függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát. A $\frac{\pi}{2}$ pontbeli érték segítségével határozza meg a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{2k^2+2k+1}$$

sorösszeget.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y, z) = x^3 + xy^2 + x^2z - z^2 + x^2$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\cos(t)\mathbf{j} + \sqrt{t}\sin(t)\mathbf{k}$ görbe $t \in [1, 16]$ paraméterértékekenek megfelelő darabjának ívhosszát.
6. Oldja meg a $x^3 + 3xy^2 + (3x^2y + y^3)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(1) = -1$ kezdeti feltétel mellett.
7. Oldja meg az $y'' + y' - 2y = x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0, y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.