Matematika szigorlat G (A3) – 2021. január 13.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. A függvény egész együtthatós polinom, amiből x kiemelhető, tehát 0 zérushely és a további lehetséges egész gyökök 12 osztói. Látható, hogy például 1 is gyök, a gyöktényezőket kiemelve $f(x) = x(x-1)(x^2-x-12) = x(x-1)(x+3)(x-4)$ adódik, tehát a zérushelyek $-3, 0, 1, 4$. A határértékek

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{11}{x^2} + \frac{12}{x^3}\right) = \infty.$$

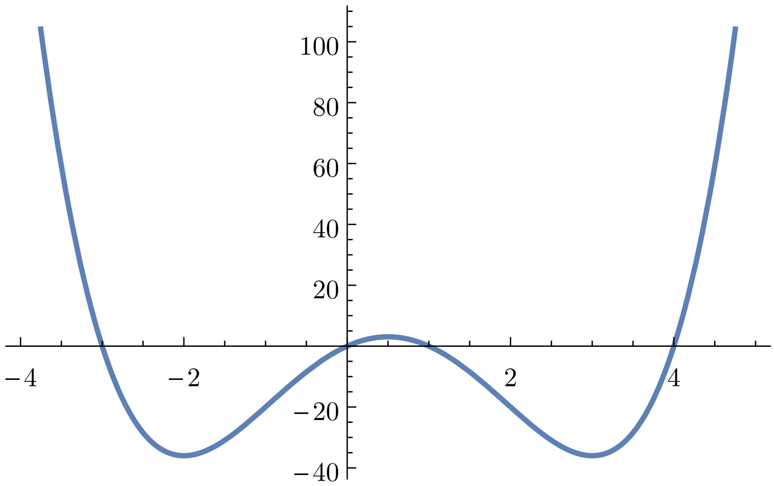
   A deriváltak

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 22x + 12 = 2(x-3)(x+2)(2x-1)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 22.$$

   f' zérushelyei $-2, \frac{1}{2}, 3$, f'' zérushelyei $\frac{3\pm 5\sqrt{3}}{6}$. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2, \frac{3-5\sqrt{3}}{6})$	$\frac{3-5\sqrt{3}}{6}$	$(\frac{3-5\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, \frac{3+5\sqrt{3}}{6})$	$\frac{3+5\sqrt{3}}{6}$	$(\frac{3+5\sqrt{3}}{6}, 3)$	3	$(3,\infty)$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	infl	$\nearrow$	max	$\searrow$	infl	$\searrow$	min	$\nearrow$
f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

   Ferde aszimpotota nincs, mivel $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$. $R_f = [-36, \infty)$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. Először $x = \ln u$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u+1}{u^2+1}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u+1}{u(u^2+1)}\,\mathrm{d}u.$$

   A kapott racionális törtfüggvényt az integráláshoz parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{u+1}{u(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B+Cu}{u^2+1}$$
$$u + 1 = A(u^2+1) + (B+Cu)u = (A+C)u^2 + Bu + A,$$

amiből a $0 = A + C$, $1 = B$, $1 = A$ egyenletrendszer adódik, azaz $C = -1$. Ezzel az integrál

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u+1}{u(u^2+1)}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{2}\frac{2u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \ln|u| + \arctan u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) \\
&= x + \arctan e^x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^3}x^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

   Megoldás. A Cauchy–Hadamard-tétel segítségével meghatározzuk a konvergenciasugarat:

   $$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{1+n^3}} = 1.$$

   A konvergenciaintervallum végpontjaiban a sor elemeinek abszolútértéke $\frac{n}{1+n^3}$, amire $n \geq 1$ esetén

   $$\frac{n}{1+n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

   teljesül, így a majoránskritérium szerint a sor abszolút konvergens. A konvergenciatartomány tehát $[-1, 1]$.

4. Adja meg a tér $z = 0$ síkra vonatkozó tükrözésének mátrixát az $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ bázisban, és határozza meg a kapott mátrix sajátértékeit.

   Megoldás. Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban a tükrözés mátrixa

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Az új bázisban a mátrix $S^{-1}AS$, ahol S oszlopai az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok komponensei:

   $$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   A és $S^{-1}AS$ sajátértékei megegyeznek, tehát 1 kétszeres, -1 egyszeres multiplicitású.
   A szorzat kiszámítását elvégezhetjük úgy, hogy az S és AS mátrixok egymás mellé írásával kapott kibővített mátrixon Gauss-eliminációt végzünk. A diagonális, így AS sorai az S sorai megszorozva a megfelelő diagonális elemmel:

   $$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1\leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3+s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

   $$\overset{s_3+s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{s_2+4s_3}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

   $$\overset{s_1-4s_3}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 9 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{s_1+s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

   Az utolsó mátrix jobb oldalon álló blokkja $S^{-1}AS$.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin^2 t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ görbe $t \in [0, \pi]$ paraméterértékekenek megfelelő darabján.

   Megoldás. A paraméterezés deriváltja $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + 2\sin t\cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, a vektormező értéke a görbén

$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) = -\sin^2 t\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Az integrál

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^\pi \mathbf{u}(\mathbf{r}(t))\cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (-\sin^2 t\mathbf{i} + \cos^3 t\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot(-\sin t\mathbf{i} + 2\sin t\cos t\mathbf{j} + \mathbf{k})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (\sin^3 t + 2\cos^4 t\sin t + 1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (\sin t - \cos^2 t\sin t + 2\cos^4 t\sin t + 1)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} - \frac{2}{5}\cos^5 t + t\right]_0^\pi \\
&= (1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \pi) - (-1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}) = \frac{32}{15} + \pi.
\end{aligned}$$

6. Határozza meg az $2x(1+y^2) + (1+x^2y)y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú, ahol $P(x,y) = 2x(1+y^2)$, $Q(x,y) = 1 + x^2y$, a deriváltak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= 4xy \\
\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= 2xy,
\end{aligned}$$

tehát nem egzakt. Keressünk egyváltozós multiplikátort:

$$\ln|M(y)| = \int \frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x,y)}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\log(1+y^2) + C$$

alapján $M(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ megfelel. Ezzel megszorozva az egyenlet

$$2x\sqrt{1+y^2} + \frac{1+x^2y}{\sqrt{1+y^2}}y' = 0,$$

ami már egzakt. Egy potenciál

$$u(x,y) = \int_0^x 2\xi\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \frac{1+x^2\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\,\mathrm{d}\eta = x^2 + \operatorname{arsinh}(y) + x^2\left(\sqrt{1+y^2} - 1\right) = \operatorname{arsinh}(y) + x^2\sqrt{1+y^2},$$

az általános megoldás implicit alakban $u(x,y(x)) = C$.

7. Oldja meg az $y'' + y = \cos x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom λ^2+1, tehát a gyökök $\pm i$. A homogén egyenlet általános megoldása $A\cos x + B\sin x$.
Az inhomogén tag trigonometrikus, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = Cx\cos x + Dx\sin x$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (C + Dx)\cos x + (D - Cx)\sin x \\
y''(x) &= (2D - Cx)\cos x + (-2C - Dx)\sin x,
\end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$2D\cos x - 2C\sin x = \cos x$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $D = \frac{1}{2}$ és $C = 0$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása és deriváltja

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2}x\sin x + A\cos x + B\sin x \\
y'(x) &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x - A\sin x + B\cos x.
\end{aligned}$$

A kezdeti feltétel $0 = y(0) = A$, $0 = y'(0) = B$, tehát a kezdetiérték-probléma megoldása $y(x) = \frac{1}{2}x\sin x$.