Matematika szigorlat G (A3) – 2021. január 19.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt[4]{n^4+n^3}$$
$$b_n = \frac{2^{2n+3} - 3^n + n^7 \ln n}{\sqrt{n} - 4^{n-5} + \sqrt[n]{n}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt[4]{n^4+n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-\sqrt{n^4+n^3}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt[4]{n^4+n^3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n)^2-(n^4+n^3)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt[4]{n^4+n^3}} \frac{1}{n^2+n+\sqrt{n^4+n^3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}} \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+3} - 3^n + n^7 \ln n}{\sqrt{n} - 4^{n-5} + \sqrt[n]{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^3 - \frac{3}{4}^n + 4^{-n} n^7 \ln n}{4^{-n}\sqrt{n} - 2^{-10} + 4^{-n}\sqrt[n]{n}} = -2^{13} = -8192
\end{aligned}$$

2. Végezze el az $f(x) = 2x - \arcsin x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

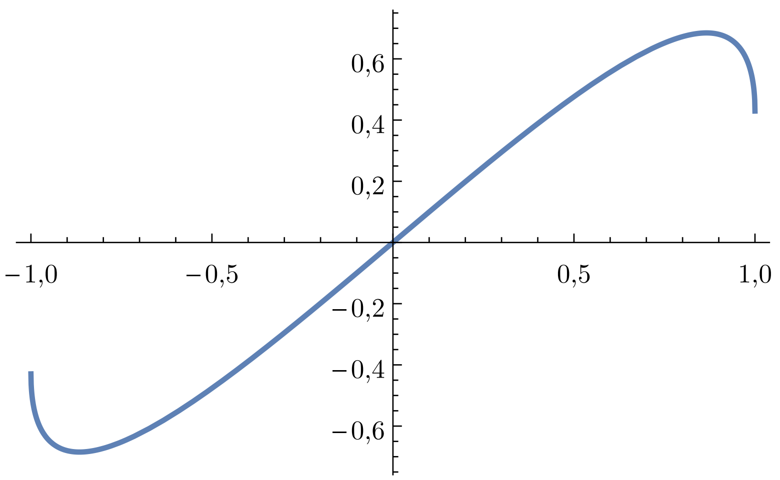
Megoldás. $D_f = [-1, 1]$, páratlan, nem periodikus. A deriváltak

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$f''(x) = -\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

f' zérushelyei $1 - x^2 = \frac{1}{4}$ alapján $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, f'' zérushelye 0. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	1	$(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$	0	$(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$	1
f	max	◟	min	◞	infl	◜	max	◝	min
f'	X	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	X
f''	X	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	X

A függvény menete alapján és $f(1) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$ felhasználásával láthatjuk, hogy az egyetlen zérushely a 0
$R_f = [\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}]$, grafikon:



3. Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} n3^{-n}$ sor összegét.

Megoldás.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n3^{-n}x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n3^{-n}x^{n-1} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}x^n = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}-1\right) = x\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^2},$$

a konvergenciasugár 3. Az $x = 1$ pontban tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} n3^{-n} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -8 \\ 2 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -1 & -8 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 6 & -1 & -\lambda-6 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2), \end{aligned}$$

tehát a sajátértékek 0 és 1 és 2. Mivel minden sajátérték multiplicitása 1, létezik sajátvektorokból álló bázis.
A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - 0\cdot I = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -8 \\ 2 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & -6 \end{bmatrix} \overset{s_1\leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -8 \\ 6 & -1 & -6 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-4s_1 \\ s_3-3s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2/(-5) \\ s_1/(-4)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - 1\cdot I = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -8 \\ 2 & 0 & -2 \\ 6 & -1 & -7 \end{bmatrix} \overset{s_1-3s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 6 & -1 & -7 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3-6s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2/2 \\ s_3/5}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -8 \\ 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -8 \end{bmatrix} \overset{s_1\leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -8 \end{bmatrix} \overset{s_2-3s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_2/2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.

5. Határozza meg az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$ görbe $t \in [0,1]$ paraméterértékekenek megfelelő darabjának tömegközéppontját.

Megoldás. A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok (koordinátafüggvények görbementi integráljai) és az ívhossz hányadosai. A derivált abszolútértéke

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \left|\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}\right| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = 2t^2+1.$$

A szükséges integrálok:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\dot{\mathbf{r}}(t)| &= \int_0^1 (2t^2+1)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}+1 = \frac{5}{3} \\ \int_0^1 t|\dot{\mathbf{r}}(t)| &= \int_0^1 (2t^3+t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{4}+\frac{1}{2} = 1 \\ \int_0^1 t^2|\dot{\mathbf{r}}(t)| &= \int_0^1 (2t^4+t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5}+\frac{1}{3} = \frac{11}{15} \\ \int_0^1 \frac{2}{3}t^3|\dot{\mathbf{r}}(t)| &= \frac{2}{3}\int_0^1 (2t^5+t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

A tömegközépont $\left(\frac{3}{5}, \frac{11}{25}, \frac{7}{30}\right)$.

6. Határozza meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = (3x^2y+z^3)\mathbf{i} + (2x^3+2yz^2)\mathbf{j} + (2y^2z+3xz^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $\mathbf{r}(t) = 3\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}$ görbe $t \in [-\pi, \pi]$ paraméterértékeknek megfelelő darabján.

   Megoldás. A görbe zárt, használhatjuk a Stokes-tételt. Legyen S az a $z=0$ síkban fekvő origó középpontú ellipszis, aminek a pereme a megadott görbe. S egy paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = 3u\cos(v)\mathbf{i} + u\sin(v)\mathbf{j}$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,2\pi]$, a jobbkéz-szabály szerint irányított normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} = (3\cos(v)\mathbf{i} + \sin(v)\mathbf{j}) \times (-3u\sin(v)\mathbf{i} + u\cos(v)\mathbf{j}) = 3u\mathbf{k}.$$

   A vektormező rotációja

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= (4yz - 4yz)\mathbf{i} + (3z^2 - 3z^2)\mathbf{j} + (6x^2 - 3x^2)\mathbf{k} = 3x^2\mathbf{k},\end{aligned}$$

   a felületen $\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) = 27u^2\cos^2(v)\mathbf{k}$. A keresett integrál

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (27u^2\cos^2(v)\mathbf{k})\cdot(3u\mathbf{k})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (81u^3\cos^2(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{81\pi}{4}.\end{aligned}$$

   Megjegyzés. Az integrált a Stokes-tétel alkalmazása nélkül közvetlenül is ki lehet számolni, ez az

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(-81\cos^2 t\sin^2 t + 54\cos^4 t\right)\mathrm{d}t = \frac{81\pi}{4}$$

   integrálra vezet.

7. Melyik függvény Laplace-transzformáltja az $F(z) = \dfrac{z(3+z^2)}{(1+z^2)^2}$ függvény?

   Megoldás. Bontsuk a függvényt parciális törtekre:

$$\frac{z(3+z^2)}{(1+z^2)^2} = \frac{Az+B}{1+z^2} + \frac{Cz+D}{(1+z^2)^2},$$

   mindkét oldalt a közös nevezővel szorozva

$$3z + z^3 = (Az+B)(1+z^2) + (Cz+D) = Az^3 + Bz^2 + (A+C)z + (B+D).$$

   Ez akkor azonosság, ha

$$\begin{aligned}1 &= A \\ 0 &= B \\ 3 &= A + C \\ 0 &= B + D,\end{aligned}$$

   tehát $A=1$, $B=0$, $C=2$, $D=0$ és így

$$F(z) = \frac{z}{1+z^2} + \frac{2z}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{1+z^2} + (-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1+z^2}.$$

   Az első tag táblázat alapján $\mathcal{L}(\cos)$, a második tag pedig $\mathcal{L}(\sin)$ deriváltjának -1-szerese, tehát a Laplace-transzformáció tulajdonságai szerint $x\sin x$ Laplace-transzformáltja. Tehát F az $f(x) = \cos x + x\sin x$ Laplace-transzformáltja.