Matematika szigorlat G (A3) – 2021. január 21.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1+x^3}{2-x^3}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushely a -1. A határértékek

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-3}+1}{2x^{-3}-1} = -1$$

   A deriváltak

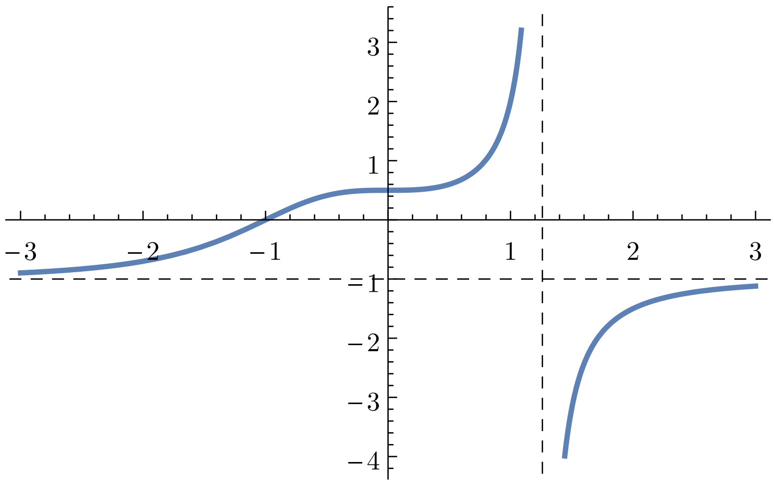
$$f'(x) = \frac{3x^2(2-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(2-x^3)^2} = \frac{9x^2}{(2-x^3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{18x(2-x^3)^2 - 9x^2\cdot 2(2-x^3)(-3x^2)}{(2-x^3)^4} = \frac{36x(1+x^3)}{(2-x^3)^3}.$$

   f' zérushelye $x=0$, f'' zérushelyei 0 és -1. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2},\infty)$
f	$\smile$	infl	$\frown$	infl	$\smile$	X	$\frown$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$+$	X	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	X	$-$

   Láttuk, hogy mindkét irányban vízszintes aszimpotota van. $R_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\pi \sin^6 x \,\mathrm{d}x$$

   Megoldás.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^6 x\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^3 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int_0^\pi \left(1 - 3\cos(2x) + 3\cos^2(2x) - \cos^3(2x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int_0^\pi \left(1 - 3\cos(2x) + 3\frac{1+\cos(4x)}{2} - \cos(2x) + \cos(2x)\sin^2(2x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\left[x - 2\sin(2x) + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}\sin(4x) + \frac{\sin^3(2x)}{6}\right]_0^\pi = \frac{5\pi}{16}
\end{aligned}$$

3. Határozza meg az

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$$

   függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.

Megoldás. f racionális törtfüggvény, parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2},$$

a közös nevezővel mindkét oldalt megszorozva $1 = A(x+2) + B(x-3) = (A+B)x + (2A-3B)$, ami akkor azonosság, ha $0 = A+B$ és $1 = 2A-3B$. Ebből $A = \frac{1}{5}$ és $B = -\frac{1}{5}$ következik, tehát

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5}\frac{1}{x-3} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+2} \\ &= -\frac{1}{15}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{10}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n - \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{3^{-n}}{15} - (-1)^n\frac{2^{-n}}{10}\right]x^n \end{aligned}$$

ha $|x| < 2$. A konvergenciasugár 2.

4. Határozza meg az alábbi egyenletrendszer megoldásszámát az a valós paraméter függvényében.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= a \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ (a+1)x_2 - 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt a kibővített mátrixon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & (a+1) & -2 & 6 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & (a+1) & -2 & 6 \end{array}\right] \overset{s_2-2s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & a+1 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s3-s2 \\ s4-\frac{a+1}{2}s_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \\ 0 & 0 & -\frac{3-a}{2} & \frac{1}{2}(3-a)(a+4) \end{array}\right] \overset{s_3 \leftrightarrow s_4}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & -\frac{3-a}{2} & \frac{1}{2}(3-a)(a+4) \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \end{array}\right].$$

Ebben az alakban leolvashatjuk, hogy $a = 3$ esetén az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 2, ami kisebb az ismeretlenek számánál, tehát ilyenkor végtelen sok megoldás van. Ha viszont $a \neq 3$, akkor az együtthatómátrix rangja 3, míg a kibővített mátrix rangja 4, ilyenkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

5. Integrálja az $f(x,y,z) = \frac{x^2}{z}$ skalármezőt az $x^2 + y^2 = z$ egyenletű felület $1 \le z \le 4$ darabján.

Megoldás. A felület egy paraméterezése $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\cos\phi\mathbf{i} + \rho\sin\phi\mathbf{j} + \rho^2\mathbf{k}$, $\rho \in [1,2]$, $\phi \in [0.2\pi]$. A normálvektor abszolútértéke

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial\mathbf{r}(\rho,\phi)}{\partial\rho} \times \frac{\partial\mathbf{r}(\rho,\phi)}{\partial\phi}\right| &= |(\cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j} + 2\rho\mathbf{k}) \times (-\rho\sin\phi\mathbf{i} + \rho\cos\phi\mathbf{j})| \\ &= \left|-2\rho^2\cos\phi\mathbf{i} - 2\rho^2\sin\phi\mathbf{j} + \rho\mathbf{k}\right| = \sqrt{\rho^2 + 4\rho^2} = \rho\sqrt{1+4\rho^2}, \end{aligned}$$

a skalármező értéke a felületen $f(\mathbf{r}(\rho,\phi)) = \frac{\rho^2\cos^2\phi}{\rho^2} = \cos^2\phi$. Az integrál

$$\begin{aligned} \int_S f\,\mathrm{d}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(\mathbf{r}(\rho,\phi))\left|\frac{\partial\mathbf{r}(\rho,\phi)}{\partial\rho} \times \frac{\partial\mathbf{r}(\rho,\phi)}{\partial\phi}\right|\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2\phi\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{\pi}{8}\int_0^1 8\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\pi}{8}\left[\frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right). \end{aligned}$$

6. Oldja meg az $e^x y'' = y'^2$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet a $v = y'$ függvényre nézve elsőrendű, szétválasztható:

$$\frac{v'}{v^2} = e^{-x},$$

   mindkét oldalt integrálva

$$-\frac{1}{v} = -e^{-x} - C,$$

   azaz $v(x) = \frac{1}{C+e^{-x}}$. A kezdeti feltétel $2 = y'(0) = v(0)$, tehát $C = -\frac{1}{2}$. Az y függvényt ebből integrálással kapjuk:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{-\frac{1}{2} + e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= -2\int \frac{e^x}{e^x - 2}\,\mathrm{d}x \\ &= -2\ln|e^x - 2| + C. \end{aligned}$$

   A kezdeti feltétel $0 = y(0) = C$, tehát a megoldás

$$y(x) = -2\ln|e^x - 2|.$$

7. Határozza meg az $(1 + x^2)y' - xy = 1$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1 + x^2}.$$

   Integráljuk mindkét oldalt:

$$\ln|y(x)| = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C,$$

   tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = C\sqrt{1 + x^2}$. Az inhomogén egyenlet megoldását az állandó variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)\sqrt{1 + x^2}$ alakban keressük. Behelyettesítve az egyenlet

$$(1 + x^2)c'(x)\sqrt{1 + x^2} + (1 + x^2)c(x)\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - xc(x)\sqrt{1 + x^2} = 1,$$

   amiből c' kifejezhető:

$$c'(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}.$$

   Az integráláshoz alkalmazzunk $x = \sinh t$ ($\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cosh t$) helyettesítést:

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{(1 + \sinh^2 t)^{3/2}}\cosh t\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{\cosh^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \tanh t = \tanh \operatorname{arsinh} x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C, \end{aligned}$$

   tehát az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = x + C\sqrt{1 + x^2}.$$