Matematika szigorlat G (A3) – 2021. március 2.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = (2 - x^2)e^{-x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus. A határértékek

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

A deriváltak

$$f'(x) = -2xe^{-x} + (2 - x^2)e^{-x} \cdot (-1) = (x^2 - 2x - 2)e^{-x}$$
$$f''(x) = (2x - 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 2)e^{-x} \cdot (-1) = x(4 - x)e^{-x}$$

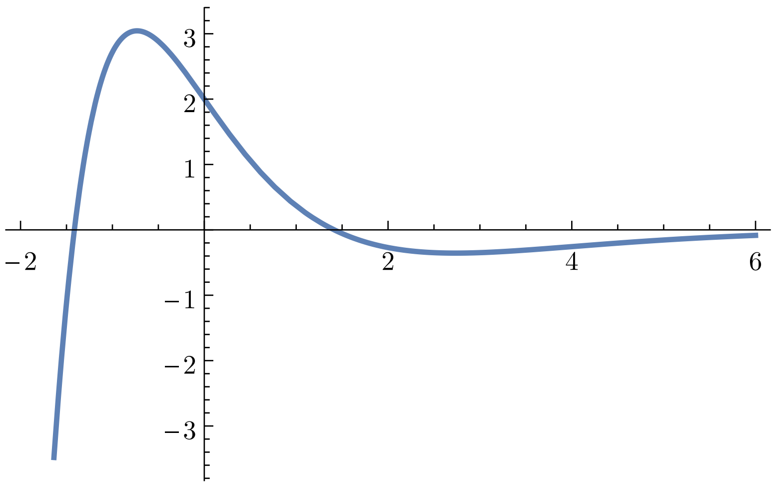
f' zérushelyei $x = 1 \pm \sqrt{3}$, f'' zérushelyei 0 és 4. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze.

	$(-\infty, 1-\sqrt{3})$	$1-\sqrt{3}$	$(1-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, 1+\sqrt{3})$	$1+\sqrt{3}$	$(1+\sqrt{3}, 4)$	4	$(4, \infty)$
f	╭	max	╮	infl	╰	min	╯	infl	╭
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$

Láttuk, hogy ∞-ben vízszintes aszimpotota van,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{x} - x\right) e^{-x} = \infty,$$

tehát $-\infty$-ben nincs ferde aszimptota. $R_f = (-\infty, f(1-\sqrt{3})] = (-\infty, 2(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}-1}]$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_{-1}^{0} \frac{6x+3}{(x-1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. Az integrandus racionális törtfüggvény, a nevező foka nagyobb mint a számlálóé, tehát először parciális törtekre bontunk:

$$\frac{6x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Mindkét oldalt megszorozzuk a közös nevezővel:

$$6x + 3 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2 = (A+C)x^2 + (A+B-2C)x + (-2A+2B+C),$$

a két oldal akkor egyenlő minden x esetén, ha

$$0 = A + C$$
$$6 = A + B - 2C$$
$$3 = -2A + 2B + C,$$

az egyenletrendszer megoldása $A = 1$, $B = 3$, $C = -1$. Tehát az integrál

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{6x+3}{(x-1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{x-1} + 3\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln|x-1| - 3\frac{1}{x-1} - \ln|x+2|\right]_{-1}^{0} \\ &= (0 + 3 - \ln 2) - \left(\ln 2 + \frac{3}{2} - 0\right) = \frac{3}{2} - 2\ln 2.\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)x^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. x^n együtthatója $a_n = 1 - \cos\frac{1}{n}$. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján a konvergenciasugár reciproka

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \cos\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1-\cos^2\frac{1}{n}}{1+\cos\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{1+\cos\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2 \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\cos\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2 \frac{1}{1+\cos\frac{1}{n}}}\frac{1}{\sqrt[n]{n}^2} = 1,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$ és a másik gyök alatti sorozat határértéke $\frac{1}{2}$, tehát annak is egyhez tart az n. gyöke.
A végpontokban ugyanezen átalakítás után az összehasonlító (majoráns) kritériumot használhatjuk, felhasználva, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n(\pm 1)^n|}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2 \frac{1}{1+\cos\frac{1}{n}} = 1,$$

tehát a hatványsor mindkét végpontban (abszolút) konvergens. A konvergenciatartomány így $[-1, 1]$.

4. Írja fel a tér z tengely körüli $+\frac{\pi}{4}$ szögű elforgatásának az $\left(\mathbf{i}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}\right)$ bázisra vonatkozó mátrixát.

Megoldás. Az $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázisban a forgatás mátrixa

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ebből bázistranszformációval meghatározható a megadott bázisban a mátrix: $S^{-1}RS$, ahol S oszlopai a megadott bázis elemeinek együttatói az $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázisban, tehát

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

S ortogonális mátrix (az oszlopok egymásra merőlegesek és egységnyi hosszúak), tehát $S^{-1} = S^T$.
Így a keresett mátrix

$$\begin{aligned}S^{-1}RS &= S^T RS \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

5. Integrálja a $\mathbf{v}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z = 1$ egyenletű felület $z \geq 0$ darabján felfelé mutató irányítás mellett.

Megoldás. Válasszuk az $\mathbf{r}(r,\phi) = r\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\phi\mathbf{j} + (1-r^2)\mathbf{k}$ paraméterezést, $r \in [0,1]$, $\phi \in [0,2\pi]$. A normálvektor

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{r}(r,\phi)}{\partial r} \times \frac{\partial\mathbf{r}(r,\phi)}{\partial\phi} &= (\cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j} - 2r\mathbf{k}) \times (-r\sin\phi\mathbf{i} + r\cos\phi\mathbf{j}) \\ &= 2r^2\cos\phi\mathbf{i} + 2r^2\sin\phi\mathbf{j} + (r\cos^2\phi + r\sin^2\phi)\mathbf{k} \\ &= 2r^2\cos\phi\mathbf{i} + 2r^2\sin\phi\mathbf{j} + r\mathbf{k},\end{aligned}$$

$r > 0$ miatt felfelé mutat.
A vektormező a felületen

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(r,\phi)) = r\cos\phi\mathbf{i} + (1-r^2)\mathbf{k},$$

tehát az integrál

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^1\int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(r,\phi))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}(r,\phi)}{\partial r} \times \frac{\partial\mathbf{r}(r,\phi)}{\partial\phi}\right)\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} (r\cos\phi\mathbf{i} + (1-r^2)\mathbf{k})\cdot(2r^2\cos\phi\mathbf{i} + 2r^2\sin\phi\mathbf{j} + r\mathbf{k})\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} (2r^3\cos^2\phi + (1-r^2)r)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\int_0^1 (r^3 + (1-r^2)r)\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r = \pi.\end{aligned}$$

6. Oldja meg a $2x + y^3 + (3xy^2+1)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú, ahol $P(x,y) = 2x + y^3$ és $Q(x,y) = 3xy^2 + 1$,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

miatt egzakt. Egy potenciál

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \int_0^x P(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_0^x 2\xi\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (3x\eta^2+1)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \Big[\xi^2\Big]_{\xi=0}^{\xi=x} + \Big[x\eta^3 + \eta\Big]_{\eta=0}^{\eta=y} = x^2 + xy^3 + y.\end{aligned}$$

Az általános megoldás implicit alakja $u(x,y(x)) = C$, a kezdeti feltétel alapján $C = u(1,y(1)) = u(1,1) = 3$, tehát a keresett megoldás implicit alakban

$$x^2 + xy(x)^3 + y(x) = 3.$$

7. Határozza meg az $y'' - y = \cosh x$ differenciálegyenlet $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.
Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$, tehát a gyökök ± 1. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^x + Be^{-x}$.
Az inhomogén tag exponenciálisok összege, mindkét tagnál külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = Cxe^x + Dxe^{-x}$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}y'(x) &= Ce^x + Cxe^x + De^{-x} - Dxe^{-x} \\ y''(x) &= 2Ce^x + Cxe^x - 2De^{-x} + Dxe^{-x},\end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$2Ce^x - 2De^{-x} = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

adódik, tehát $C = \frac{1}{4}$ és $D = -\frac{1}{4}$. Az általános megoldás és deriváltja így

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{1}{2}x\sinh x + Ae^x + Be^{-x} \\ y'(x) &= \frac{1}{2}\sinh x + \frac{1}{2}x\cosh x + Ae^x - Be^{-x},\end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}0 &= y(0) = A + B \\ 0 &= y'(0) = A - B,\end{aligned}$$

vagyis $A = B = 0$. A keresett megoldás $y(x) = \frac{1}{2}x\sinh x$.