Matematika szigorlat G (A3) – 2021. május 20.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, páros, nem páratlan, nem periodikus. A határértékek

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

   A deriváltak

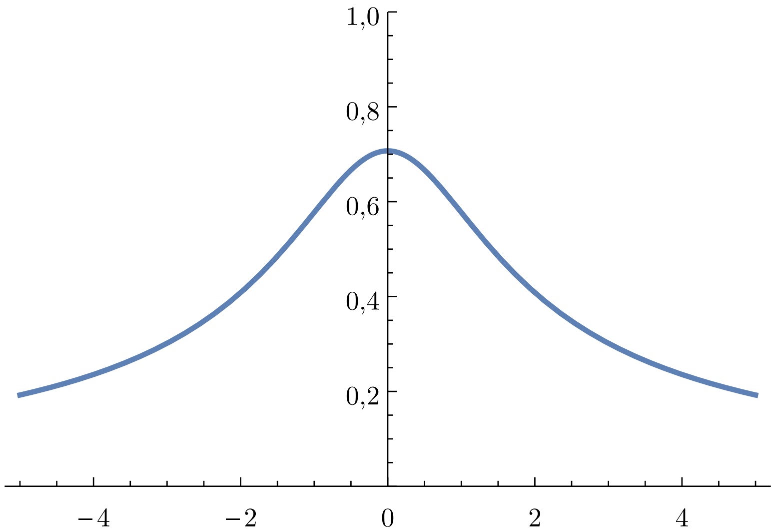
$$f'(x) = -\frac{1}{2}(2+x^2)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{(2+x^2)^{3/2}}$$

$$f''(x) = -\frac{(2+x^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(2+x^2)^{1/2} \cdot 2x}{(2+x^2)^3} = 2\frac{x^2-1}{(2+x^2)^{5/2}}$$

   f' zérushelye $x = 0$, f'' zérushelyei ± 1. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f		infl		max		infl	
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

   Láttuk, hogy $\pm\infty$-ben vízszintes aszimpotota van. $R_f = (0, f(0)] = (0, 1/\sqrt{2}]$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arsinh}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\operatorname{arsinh}\frac{b}{\sqrt{2}} = \infty.\end{aligned}$$

3. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2+x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-1/2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n,\end{aligned}$$

a binomiális sor konvergenciájának feltétele $\left|\frac{x^2}{2}\right| < 1$, azaz $|x| < \sqrt{2}$, tehát a konvergenciatartomány $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

4. Határozza meg a legfeljebb harmadfokú poliomok terén az x^2+1, x^2-1, x^3+x, x^3-x bázisban a deriválás (mint lineáris transzformáció) mátrixát, és írja fel a kapott mátrix tizedik hatványát.

   Megoldás. A mátrix felírásához a báziselemek képeit kell kifejteni a megadott bázisban:

$$\begin{aligned}(x^2+1)' &= 2x = (x^3+x)-(x^3-x)\\ (x^2-1)' &= 2x = (x^3+x)-(x^3-x)\\ (x^3+x)' &= 3x^2+1 = 2(x^2+1)+(x^2-1)\\ (x^3-x)' &= 3x^2-1 = (x^2+1)+2(x^2-1).\end{aligned}$$

   Az egyes sorokban található kifejtési együtthatók adják a mátrix oszlopait. Ezek alapján a lineáris transzformáció mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

   Egy lineáris transzformáció mátrixának tizedik hatványa a lineáris transzformáció tizedik hatványának (azaz tíz egymás utáni alkalmazásának) mátrixa. Mivel minden legfeljebb harmadfokú polinom tizedik deriváltja 0, a mátrix tizedik hatványa nullmátrix.

5. Hol van a tömegközéppontja az $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$ paraméteres egyenletű görbe $t \in [-1, 1]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának?

   Megoldás. A derivált abszolútértéke

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \left|e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}\right| = \sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2} = e^t + e^{-t}.$$

   A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok és az ívhossz hányadosai. A szükséges integrálok:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(e^t+e^{-t})\,\mathrm{d}t &= \left[e^t-e^{-t}\right]_{-1}^{1} = 2e-2e^{-1}\\ \int_{-1}^{1}e^t(e^t+e^{-t})\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{e^{2t}}{2}+t\right]_{-1}^{1} = 2+\frac{e^2-e^{-2}}{2}\\ \int_{-1}^{1}e^{-t}(e^t+e^{-t})\,\mathrm{d}t &= \left[t-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_{-1}^{1} = 2+\frac{e^2-e^{-2}}{2}\\ \int_{-1}^{1}\sqrt{2}t(e^t+e^{-t})\,\mathrm{d}t &= 0,\end{aligned}$$

   az utolsó integrálban felhasználva, hogy páratlan függvényt integrálunk az origóra szimmetrikus intervallumon. A tömegközéppont helye tehát $\frac{1+\frac{e^2-e^{-2}}{4}}{e-e^{-1}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$.

6. Határozza meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = y^2z^3\mathbf{i} + y^3z^2\mathbf{j} + z^3x^2\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2+y^2+z^2 = 1$ egyenletű felületen kifelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. Az egységgömb felületén kell integrálni, használhatjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt. A vektormező divergenciája

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z} = 3y^2z^2+3x^2z^2 = 3(x^2+y^2)z^2.$$

Az integrált gömbi koordináták használatával érdemes kiszámítani: $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta\mathbf{k}$, a paramétertartomány $[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$. A keresett integrál

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3(r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi)r^2\cos^2\vartheta r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3r^6\sin^3\vartheta\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 6\pi\int_0^1 r^6\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\left(\sin\vartheta\cos^2\vartheta - \sin\vartheta\cos^4\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{6\pi}{7}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\vartheta + \frac{1}{5}\cos^5\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{8\pi}{35}.
\end{aligned}$$

7. Oldja meg az $xy^2 + (2+x^2)yy' = 0$ differenciálegyenletet $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú, ahol $P(x,y) = xy^2$, $Q(x,y) = (2+x^2)y$,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

tehát egzakt. Egy potenciál

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^x P(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
&= \int_0^x 0\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (2+x^2)\eta\,\mathrm{d}\eta \\
&= (2+x^2)\frac{y^2}{2}.
\end{aligned}$$

Az általános megoldás implicit alakban $u(x,y(x)) = C$, a kezdeti feltétel alapján $C = u(\sqrt{2}, y(\sqrt{2})) = u(\sqrt{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Ebből a megoldást explicit alakban is ki lehet fejezni:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{2+x^2}\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}.$$