Matematika szigorlat G (A3) – 2021. június 3.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{n^6 + 2021n^2 - 2^{2n+3}}{17n^3 + 4^n - \ln n}$$
$$b_n = n \sin\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6 + 2021n^2 - 2^{2n+3}}{17n^3 + 4^n - \ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6 4^{-n} + 2021n^2 4^{-n} - 8}{17n^3 4{-}n + 1 - 4^{-n}\ln n} = -8. \\
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} n \sin\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

mivel $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$ és $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Végezze el az $f(x) = (5-x^2)^3$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, páros, nem páratlan, nem periodikus. A határértékek

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty.$$

A deriváltak

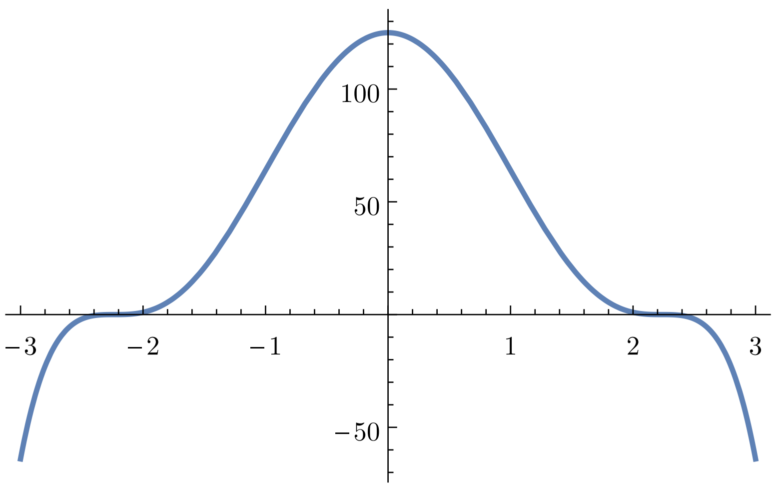
$$f'(x) = 3(5-x^2)^2 \cdot (-2x) = -6x(5-x^2)^2$$
$$f''(x) = -6(5-x^2)^2 - 6x \cdot 2(5-x^2) \cdot (-2x) = 30(x-1)(x+1)(5-x^2)$$

f' zérushelyei $x = 0$ és $x = \pm\sqrt{5}$, f'' zérushelyei ± 1 és $\pm\sqrt{5}$. Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze.

	$(-\infty,-\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}$	$(-\sqrt{5},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{5})$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5},\infty)$
f	◜	infl	◞	infl	◜	max	◝	infl	◟	infl	◝
f'	+	0	+	+	+	0	−	−	−	0	−
f''	−	0	+	0	−	−	−	0	+	0	−

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(5-x^2)^3}{x} = \mp\infty,$$

tehát nincs ferde aszimpota. $R_f = (-\infty, f(0)] = (-\infty, 125]$, grafikon:



3. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \\ x & \text{ha } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \pi - x & \text{ha } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát.

Megoldás. A függvény páratlan, tehát a Fourier-sora

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

alakú. Az együtthatók

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mivel $f(x)\sin(nx) = (-1)^{n+1} f(\pi - x)\sin(n(\pi - x))$, páros n esetén az integrál 0, míg páratlan n esetén a 0 és $\pi/2$ között számított integrál kétszerese.

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} x \sin\big((2k+1)x\big)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-x \frac{\cos\big((2k+1)x\big)}{2k+1} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-1) \frac{\cos\big((2k+1)x\big)}{2k+1}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-x \frac{\cos\big((2k+1)x\big)}{2k+1} + \frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{(2k+1)^2} \right]_0^{\pi/2} = (-1)^k \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

A Fourier-sor tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin\big((2k+1)x\big).$$

4. Számítsa ki az $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ integrált.

Megoldás. Az integrált az integrálás sorrendjének felcserélésével számítjuk ki.

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| 0 \le y \le 4, \sqrt{y} \le x \le 2\big\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^2\big\}$$

alapján

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \int_0^2 \int_0^{x^2} e^{x^3}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 x^2 e^{x^3}\, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{3} e^{x^3} \right]_0^2 = \frac{e^8 - 1}{3}. \end{aligned}$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = x^3 z^2 \mathbf{i} + y^3 z^2 \mathbf{j} + x^2 y^2 z \mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = 1$ felület $|z| \le 1$ darabján kifelé (a z tengelytől távolodó irányba) mutató irányítás szerint.

Megoldás. A felület egy paraméterezése $\mathbf{r}(\phi, z) = \cos\phi \mathbf{i} + \sin\phi \mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a paramétertartomány $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$. A normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (-\sin\phi \mathbf{i} + \cos\phi \mathbf{j}) \times \mathbf{k} = \cos\phi \mathbf{i} + \sin\phi \mathbf{j},$$

ez kifelé mutat. A vektormező értéke a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\phi, z)) = \cos^3\phi z^2 \mathbf{i} + \sin^3\phi z^2 \mathbf{j} + \cos^2\phi \sin^2\phi z \mathbf{k}.$$

A keresett integrál

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} z^2(\cos^4\phi+\sin^4\phi)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\
&= \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{1+\cos 2\phi}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos 2\phi}{2}\right)^2\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2\phi\right)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{3}(2\pi+\pi)=\pi.
\end{aligned}$$

6. Határozza meg a $2xy' + y = \sqrt{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2x}.$$

   Mindkét oldalt integráljuk:

$$\ln|y(x)| = -\frac{1}{2}\ln|x| + C,$$

   amiből $y(x) = \frac{C}{\sqrt{|x|}}$.
   Az inhomogén egyenlet megoldását az állandó variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)\frac{1}{\sqrt{x}}$ alakban keressük (az abszolútérték elhagyható, mivel az inhomogén tag csak $x \geq 0$ esetén értelmes). Ezt behelyettesítve a egyenlet

$$2xc'(x)\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x},$$

   amiből $c'(x) = \frac{1}{2}$, azaz $c(x) = \frac{x}{2} + C$. Az általános megoldás

$$y(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

7. Oldja meg az $y'' + 4y' + 4y = 4x$ differenciálegyenletet $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, tehát a gyök -2 (belső rezonancia). A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$.
   Az inhomogén tag polinom, nincs külső rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = C_0 + C_1x$ alakban. A deriváltak $y'(x) = C_1$ és $y''(x) = 0$, az egyenletbe behelyettesítve

$$4C_1 + 4(C_0 + C_1x) = 4x$$

   adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $C_1 = 1$ és $C_0 = -1$. Az általános megoldás és annak deriváltja tehát

$$\begin{aligned}
y(x) &= -1 + x + Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} \\
y'(x) &= 1 - 2Ae^{-2x} + Be^{-2x} - 2Bxe^{-2x}.
\end{aligned}$$

   A kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}
-1 &= y(0) = -1 + A \\
0 &= y'(0) = 1 - 2A + B,
\end{aligned}$$

   ebből $A = 0$ és $B = -1$ adódik. A kezdetiérték-probléma megoldása $y(x) = -1 + x - xe^{-2x}$.