

Matematika szigorlat G (A3) – 2021. június 3.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{n^6 + 2021n^2 - 2^{2n+3}}{17n^3 + 4^n - \ln n}$$

$$b_n = n \sin \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right)$$

2. Végezze el az $f(x) = (5 - x^2)^3$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \\ x & \text{ha } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \pi - x & \text{ha } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát.

4. Számítsa ki az $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy$ integrált.
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^3 z^2 \mathbf{i} + y^3 z^2 \mathbf{j} + x^2 y^2 z \mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = 1$ felület $|z| \leq 1$ darabján kifelé (a z tengelytől távolodó irányba) mutató irányítás szerint.
6. Határozza meg a $2xy' + y = \sqrt{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Oldja meg az $y'' + 4y' + 4y = 4x$ differenciálegyenletet $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.