**Matematika szigorlat G (A3)** – 2021. június 17.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n^3 + 3n\sqrt{n} - 2} - \sqrt{n^3 - n}$$
$$b_n = \left(\frac{n^2+1}{(n+2)(n+3)}\right)^n$$

*Megoldás.*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3 + 3n\sqrt{n} - 2} - \sqrt{n^3 - n}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n\sqrt{n} - 2 - (n^3 - n)}{\sqrt{n^3 + 3n\sqrt{n} - 2} + \sqrt{n^3 - n}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 2n^{-3/2} + n^{-1/2}}{\sqrt{1 + 3n^{-3/2} - 2n^{-3}} + \sqrt{1 - n^{-2}}} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{(n+2)(n+3)}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n^2 + 1 - (n+2)(n+3)}{(n+2)(n+3)}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-5n-5}{(n+2)(n+3)}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-5n-5}{(n+2)(n+3)}\right)^{\frac{(n+2)(n+3)}{-5n-5}}\right]^{-\frac{n(5n+5)}{n^2+5n+6}} = \frac{1}{e^5}.\end{aligned}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int x(x-1)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

*Megoldás.* Kétszer parciálisan integrálunk:

$$\begin{aligned}\int x(x-1)\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \int (x^2 - x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= (x^2 - x)\frac{\sin(2x)}{2} - \int (2x-1)\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= (x^2 - x)\frac{\sin(2x)}{2} - \left((2x-1)\frac{-\cos(2x)}{4} - \int 2\frac{-\cos(2x)}{4}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= (x^2 - x)\frac{\sin(2x)}{2} - \left((2x-1)\frac{-\cos(2x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\\ &= (2x^2 - 2x - 1)\frac{\sin(2x)}{4} + (2x-1)\frac{\cos(2x)}{4}.\end{aligned}$$

3. Határozza meg az $A$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

*Megoldás.* A mátrix valós szimmetrikus, tehát létezik sajátvektorokból álló bázis. A karakterisztikus polinom

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\left[(1-\lambda)^2 - 2^2\right]$$
$$= (2-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (2-\lambda)^2(\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

tehát a sajátértékek $-1$, 2 (kétszeres) és 3.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - (-1) \cdot I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & s & t \end{bmatrix}^T$ alakú vektorok, ahol $s, t$ tetszőleges, de egyszerre nem 0.
A $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - 3 \cdot I = \left[\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.

4. Hol vannnak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^2y + 2xy + y^2$ függvény lokális szélsőértékei?

   *Megoldás.* A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

   $$f'_x(x, y) = 2xy + 2y = 2(x + 1)y$$
   $$f'_y(x, y) = x^2 + 2x + 2y,$$

   az előbbi akkor 0, ha $x = -1$ vagy $y = 0$. Ezeket az $f'_y(x, y) = 0$ egyenletbe helyettesítve $y = \frac{1}{2}$ illetve $x = 0$ vagy $x = -2$ adódik, tehát a lehetséges pontok $(-1, \frac{1}{2})$, $(0, 0)$ és $(-2, 0)$.
   A Hesse-mátrix

   $$H(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x + 2 \\ 2x + 2 & 2 \end{bmatrix},$$

   $\det H(x, y) = 4y - 4(x + 1)^2$, ennek értéke a $(0, 0)$ és $(-2, 0)$ pontokban $-4$, tehát ezek nyeregpontok.
   A $(-1, \frac{1}{2})$ pontban $\det H(-1, \frac{1}{2}) = 2$, tehát itt van lokális szélsőérték. A főátló elemei pozitívak, tehát lokális minimumhely.

5. Integrálja az $f(x, y, z) = x^2+y^2$ skalármezőt a $|z| \leq 1-x^2-y^2$ egyenlőtlenség által meghatározott alakzaton.

   *Megoldás.* Az alakzat egy paraméterezése $\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cos \varphi \mathbf{i} + \rho \sin \varphi \mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a paramétertartományt megadó egyenlőtlenségek $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $\rho^2 - 1 \leq z \leq 1 - \rho^2$, a Jacobi-determináns $\rho$. $f(\mathbf{r}(\rho, \phi, z)) = \rho^2$. A térfogati integrál

   $$\begin{aligned} \iiint f \,\mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2-1}^{1-\rho^2} \rho^2 \cdot \rho \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 2(1 - \rho^2)\rho^3 \,\mathrm{d}\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 (\rho^3 - \rho^5) \,\mathrm{d}\rho \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + \sin^2 x)y\mathbf{i} - (y^2 + \cos^2 y)x\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ vektormezőt az $ABCD$ négyzeten (ebben a sorrendben körüljárva), ha $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$, $D = (0, 1, 0)$.

*Megoldás.* Zárt görbén integrálunk, használhatjuk a Stokes-tételt. A vektormező rotációja

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (-y^2 - \cos^2 y - x^2 - \sin^2 x)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

A négyzet paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, a paramétertartomány $[0,1]\times[0,1]$, a normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},$$

ez éppen a jobbkéz-szabály szerinti irányításnak megfelelő. A rotáció értéke a felületen $\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) = u\mathbf{i} - v\mathbf{j} + (-\sin^2 u - \cos^2 v - u^2 - v^2)\mathbf{k}$. A keresett integrál

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} \\ &= \int_0^1\int_0^1 \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= -\int_0^1\int_0^1 (\sin^2 u + \cos^2 v + u^2 + v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= -\int_0^1\int_0^1 (\frac{1-\cos 2u}{2} + \frac{1+\cos 2v}{2} + u^2 + v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \cos 2u\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos 2v\,\mathrm{d}v}_{0} - \int_0^1\int_0^1 (1+u^2+v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= -\int_0^1\left(1+\frac{1}{3}+v^2\right)\mathrm{d}v = -\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

7. Határozza meg az $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   *Megoldás.* Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$, tehát a gyökök $-2$ és $-1$. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x} + Be^{-x}$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = x(C_0 + C_1 x)e^{-x}$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}y'(x) &= C_0e^{-x} - C_0xe^{-x} + 2C_1xe^{-x} - C_1x^2e^{-x} \\ y''(x) &= -2C_0e^{-x} + C_0xe^{-x} + 2C_1e^{-x} - 4C_1xe^{-x} + C_1x^2e^{-x},\end{aligned}$$

   az egyenletbe behelyettesítve

$$C_0e^{-x} + 2C_1e^{-x} + 2C_1xe^{-x} = xe^{-x}$$

   adódik, ez akkor teljesül minden $x$-re, ha $C_1 = \frac{1}{2}$ és $C_0 = -1$. Az általános megoldás

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{-x} + Ae^{-2x} + Be^{-x}.$$