

Matematika szigorlat G (A3) – 2021. június 17.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n^3 + 3n\sqrt{n} - 2} - \sqrt{n^3 - n}$$

$$b_n = \left(\frac{n^2 + 1}{(n+2)(n+3)} \right)^n$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int x(x-1)\cos(2x) dx$$

3. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis (\mathbb{C} felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^2y + 2xy + y^2$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Integrálja az $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ skalármezőt a $|z| \leq 1 - x^2 - y^2$ egyenlőtlenség által meghatározott alakzaton.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + \sin^2 x)y\mathbf{i} - (y^2 + \cos^2 y)x\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ vektormezőt az $ABCD$ négyzeten (ebben a sorrendben körüljárva), ha $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$, $D = (0, 1, 0)$.
7. Határozza meg az $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.