Matematika szigorlat G (A3) – 2021. szeptember 23.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a, b]$, amire $f(x) = y$.

2. Definiálja egy f függvény x_0 pontbeli deriváltját.

   Megoldás. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$

3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható (a, b)-n, deriváltja ott f és f integrálható, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Definiálja a valós vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{R}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

5. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát abszolút konvergens sorra.

   Megoldás. A $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergens. Például $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

    Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}z$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = n\left(\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4-n}\right)$$
$$b_n = \left(\frac{n^2+43n-8}{n^2}\right)^{47n+11}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4-n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\frac{n^4+n-(n^4-n)}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+43n-8}{n^2}\right)^{47n+11}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{43n-8}{n^2}\right)^{47n+11}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{43n-8}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{43n-8}}\right]^{(47n+11)\frac{43n-8}{n^2}} = e^{2021},\end{aligned}$$

mivel a szögletes zárójelen belüli kifejezés határértéke e, a külső kitevőé pedig

$$\lim_{n\to\infty}(47n+11)\frac{43n-8}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(47+\frac{11}{n}\right)\left(43-\frac{8}{n}\right) = 47\cdot 43 = 2021.$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. $x = u^2$, $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ helyettesítést végzünk:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u^2}{1+u}2u\,\mathrm{d}u\\ &= 2\int \frac{u^3}{1+u}\,\mathrm{d}u\\ &= 2\int \left(u^2-u+1-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u\\ &= 2\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln(1+u)\right)\\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.\end{aligned}$$

3. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2\\ -7 & -4 & -6\\ 9 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda-3 & 0 & -2\\ -7 & -\lambda-4 & -6\\ 9 & 3 & 7-\lambda\end{vmatrix}\\ &= -\lambda^3+\lambda\\ &= -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1),\end{aligned}$$

tehát a sajátértékek 0 és ± 1. Mivel minden sajátérték multiplicitása 1, létezik sajátvektorokból álló bázis. A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A-0\cdot I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -7 & -4 & -6 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3+3s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_1\leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2-3s_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 12 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -7 & -5 & -6 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3+2s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{s_1\leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-s_1 \\ s_3+4s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -7 & -3 & -6 \\ 9 & 3 & 8 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-3s_1 \\ s_3+4s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2+s_3 \\ s_1\leftrightarrow s_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_2+2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.

4. Hol vannnak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^2y + xy + y^2$ függvény lokális szélsőértékei?

   Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$f'_x(x, y) = 2xy + y = (2x + 1)y$$
$$f'_y(x, y) = x^2 + x + 2y,$$

   tehát a közös zérushelyek $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$.
   A Hesse-mátrix

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 1 + 2x \\ 1 + 2x & 2 \end{bmatrix},$$

   $\det H(x, y) = 4y - (1 + 2x)^2$. Ennek értéke a $(-1, 0)$ és $(0, 0)$ pontokban -1, tehát ezek nyeregpontok, míg a $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ pontban a determináns $\frac{1}{2}$, tehát itt lokális szélsőérték van. A főátló elemei itt pozitívak, tehát ez lokális minimumhely.

5. Hol van a tömegközéppontja az $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \sqrt{3}\cos t\mathbf{k}$ paraméteres egyenletű görbe $t \in [0, \pi]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának?

   Megoldás. A derivált abszolútértéke

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}(t)| &= \left|-\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} - \sqrt{3}\sin t\mathbf{k}\right| \\ &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (-\sqrt{3}\sin t)^2} \\ &= \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2. \end{aligned}$$

   A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok és az ívhossz hányadosai, a szükséges integrálok

$$\int_0^\pi 2\,\mathrm{d}t = 2\pi$$
$$\int_0^\pi 2\cos t\,\mathrm{d}t = [2\sin t]_0^\pi = 0$$
$$\int_0^\pi 2\cdot 2\sin t\,\mathrm{d}t = [-4\cos t]_0^\pi = 8$$
$$\int_0^\pi 2\cdot\sqrt{3}\cos t\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{3}\sin t\right]_0^\pi = 0.$$

   A tömegközéppont helye tehát $\frac{4}{\pi}\mathbf{j}$.

6. Oldja meg az $(-6x^2 + 2xy) + (x^2 + 3y^2)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú, ahol $P(x,y) = -6x^2 + 2xy$, $Q(x,y) = x^2 + 3y^2$,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

tehát egzakt. Egy potenciál

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_0^x (-6\xi^2)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (x^2 + 3\eta^2)\,\mathrm{d}\eta \\ &= -2x^3 + x^2 y + y^3. \end{aligned}$$

Az általános megoldás implicit alakban $u(x, y(x)) = C$, a kezdeti feltétel alapján $C = u(0, y(0)) = u(0,1) = 1$. A keresett megoldás tehát

$$-2x^3 + x^2 y(x) + y(x)^3 = 1.$$

7. Határozza meg $y'' + y' = x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$, tehát a gyökök 0 és -1. A homogén egyenlet általános megoldása $A + Be^{-x}$.
Az inhomogén tag polinom, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = x(C_0 + C_1 x) = C_0 x + C_1 x^2$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_0 + 2C_1 x \\ y''(x) &= 2C_1, \end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$2C_1 + C_0 + 2C_1 x = x$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $2C_1 + C_0 = 0$ és $2C_1 = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $C_0 = -1$, $C_1 = \frac{1}{2}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = -x + \frac{1}{2}x^2 + A + Be^{-x}$.