

## Matematika szigorlat G (A3) – 2021. szeptember 23.

Elmélet ( $10 \times 3 = 30$  pont)

1. Mondja ki a Bolzano-tételt.
2. Definiálja egy  $f$  függvény  $x_0$  pontbeli deriváltját.
3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.
4. Definiálja a valós vektortér fogalmát.
5. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát abszolút konvergens sorra.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az  $f(x, y)$  differenciálható függvény grafikonját az  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  pontban érinti.
7. Hogyan lehet kiszámítani az  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.
10. Definiálja az  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ( $7 \times 10 = 70$  pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = n \left( \sqrt{n^4 + n} - \sqrt{n^4 - n} \right)$$

$$b_n = \left( \frac{n^2 + 43n - 8}{n^2} \right)^{47n+11}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx$$

3. Határozza meg az  $A$  mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ( $\mathbb{C}$  felett)?

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -7 & -4 & -6 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Hol vannak és milyen típusúak az  $f(x, y) = x^2y + xy + y^2$  függvény lokális szélsőértékei?
5. Hol van a tömegközéppontja az  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \cos t \mathbf{k}$  paraméteres egyenletű görbe  $t \in [0, \pi]$  paraméterértékeknek megfelelő darabjának?
6. Oldja meg az  $(-6x^2 + 2xy) + (x^2 + 3y^2)y' = 0$  differenciálegyenletet  $y(0) = 1$  kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg  $y'' + y' = x$  differenciálegyenlet általános megoldását.