Matematika szigorlat G (A3) – 2021. december 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $1 - \sqrt{3}i$ számot.

   Megoldás. A trigonometrikus alak $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. $1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$.

2. Definiálja egy f függvény x_0 pontbeli deriváltját.

   Megoldás. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ vagy $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$

3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a,b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a,b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

5. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely abszolút konvergens.

   Megoldás. A $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergens. Például $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x,y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

    Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}z$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = (2 - x^2)e^x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, a zérushelyek $\pm\sqrt{2}$. A határértékek

$$\lim_{x\to\infty}(2-x^2)e^x = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(2-x^2)e^x = 0.$$

   A deriváltak

$$f'(x) = -2xe^x + (2-x^2)e^x = (2-2x-x^2)e^x$$
$$f''(x) = (-2-2x)e^x + (2-2x-x^2)e^x = -x(x+4)e^x.$$

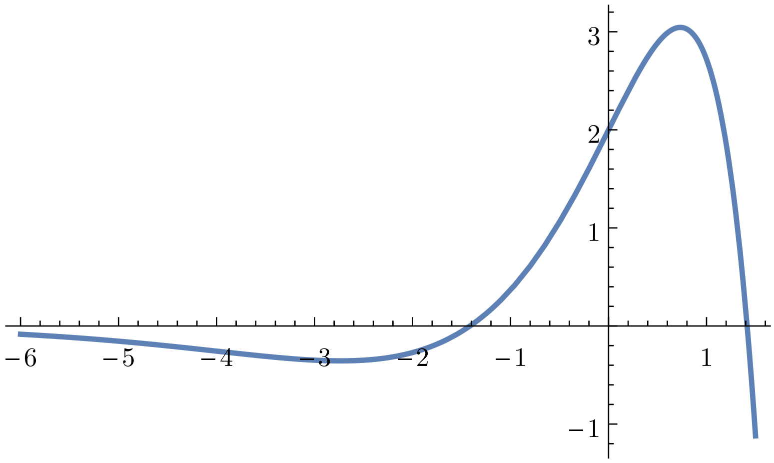
   f' zérushelyei $x = -1 \pm \sqrt{3}$, a kettő között pozitív. f'' zérushelyei -4 és 0, a kettő között pozitív:

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1-\sqrt{3})$	$-1-\sqrt{3}$	$(-1-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3}-1)$	$\sqrt{3}-1$	$(\sqrt{3}-1,\infty)$
f	$\searrow$	infl	$\searrow$	min	$\nearrow$	infl	$\nearrow$	max	$\searrow$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

   Láttuk, hogy $-\infty$ irányában vízszintes aszimptota van,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2-x^2)e^x}{x} = -\infty$$

   tehát $+\infty$ irányában nem létezik ferde aszimptota. $R_f = (-\infty, f(\sqrt{3}-1)] = (-\infty, 2\left(\sqrt{3}-1\right)e^{\sqrt{3}-1}]$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. A primitív függvényt parciális integrálással határozzuk meg:

$$\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

   Az integrál

$$\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to0+}\int_\alpha^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\alpha\to0+}\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_\alpha^1$$
$$= \lim_{\alpha\to0+}\left(-\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{\alpha^2}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ sor összegfüggvényét.

Megoldás. Mivel a hatványsorokat a konvergenciatartomány belsejében tagonként lehet deriválni,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \\
&= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \\
&= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\
&= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x}{1-x} \\
&= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x \frac{(1-x)-(-x)}{(1-x)^2} \\
&= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= x \frac{(1-x)^2 - x \cdot 2(1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} \\
&= \frac{x - x^3}{(1-x)^4}
\end{aligned}$$

4. Határozza meg az

$$\begin{aligned}
-3x_1 - 3x_4 &= 0 \\
-3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\
3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\
-x_1 - 2x_2 + a x_4 &= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásszámát az a valós paraméter függvényében.

Megoldás. Az egyenletrendszer homogén lineáris, tehát a megoldásszám 1 vagy ∞ attól függően, hogy az ismeretlenek száma egyenlő vagy nagyobb mint az együtthatómátrix rangja. A rang meghatározásához sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk az együtthatómátrixot:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & a \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-s_1 \\ s_3+s_1 \\ s_4-s_1/3}}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & a+1 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_3+3/2s_2 \\ s_4-s_2}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & a-4 \end{bmatrix} \overset{s_4+s_3}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a-\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Eszerint a rang $a = \frac{3}{2}$ esetén 3, ilyenkor végtelen sok megoldás van, egyébként pedig a rang 4, ilyenkor egy megoldás van.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = (t^2+t)\mathbf{i} + (t^2-t)\mathbf{j} + \sqrt{6}t\mathbf{k}$ egyenletű görbe $t \in [1,2]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.

Megoldás. A derivált abszolútértéke

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \left|(2t+1)\mathbf{i} + (2t-1)\mathbf{j} + \sqrt{6}\mathbf{k}\right| = \sqrt{(2t+1)^2 + (2t-1)^2 + 6} = 2\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}.$$

Az ívhossz meghatározásához ezt integráljuk $t = \sinh u$, $\mathrm{d}t = \cosh u \, \mathrm{d}u$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, \mathrm{d}t &= 2\sqrt{2} \int_1^2 \sqrt{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\
&= 2\sqrt{2} \int_{\operatorname{arsinh} 1}^{\operatorname{arsinh} 2} \cosh^2 u \, \mathrm{d}u \\
&= \sqrt{2} \int_{\operatorname{arsinh} 1}^{\operatorname{arsinh} 2} (1 + \cosh 2u) \, \mathrm{d}u \\
&= \sqrt{2} \left[u + \frac{\sinh 2u}{2} \right]_{\operatorname{arsinh} 1}^{\operatorname{arsinh} 2} \\
&= \sqrt{2} \operatorname{arsinh}(2) - \sqrt{2} \operatorname{arsinh}(1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(2 \operatorname{arsinh} 2) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(2 \operatorname{arsinh} 1).
\end{aligned}$$

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felület $z \geq 0$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

   Megoldás. A gömbfelület szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \sin\vartheta \cos\varphi \mathbf{i} + \sin\vartheta \sin\varphi \mathbf{j} + \cos\vartheta \mathbf{k}$, a megadott darabnak megfelelő paramétertartományt a $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ egyenlőtlenségek határozzák meg. A normálvektor

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} &= (\cos\vartheta \cos\varphi \mathbf{i} + \cos\vartheta \sin\varphi \mathbf{j} - \sin\vartheta \mathbf{k}) \times (-\sin\vartheta \sin\varphi \mathbf{i} + \sin\vartheta \cos\varphi \mathbf{j}) \\
&= \sin^2\vartheta \cos\varphi \mathbf{i} + \sin^2\vartheta \sin\varphi \mathbf{j} + \cos\vartheta \sin\vartheta \mathbf{k},
\end{aligned}$$

   ez kifelé mutat. A vektormező értéke a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) = \sin^2\vartheta \cos^2\varphi \mathbf{i} + \cos^2\vartheta \mathbf{k}.$$

   Az integrál

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\sin^4\vartheta \cos^3\varphi + \cos^3\vartheta \sin\vartheta \right) \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^3\vartheta \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\pi \left[-\frac{\cos^4\vartheta}{4} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

7. Oldja meg az $xy' + y = \sqrt{x}$ differenciálegyenletet $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x},$$

   mindkét oldalt integrálva $\ln|y(x)| = -\ln|x|$ adódik, azaz $y(x) = \frac{C}{x}$.
   Az inhomogén egyenlet megoldását az állandó variálásának módszere szerint $y(x) = \frac{c(x)}{x}$ alakban keressük, a behelyettesítés után kapott egyenlet

$$x \frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x} = \sqrt{x},$$

   azaz $c'(x) = \sqrt{x}$. Ennek alapján $c(x) = \frac{2}{3} x^{3/2}$, tehát az általános megoldás $y(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{C}{x}$. A kezdeti feltétel alapján $C = \frac{1}{3}$.