Matematika szigorlat G (A3) – 2021. december 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $1 - \sqrt{3}i$ számot.
2. Definiálja egy f függvény x_0 pontbeli deriváltját.
3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
4. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
5. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely abszolút konvergens.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = (2 - x^2)e^x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int_0^1 x \ln x \, \mathrm{d}x$$
3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ sor összegfüggvényét.
4. Határozza meg az
$$\begin{aligned} -3x_1 - 3x_4 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + ax_4 &= 0 \end{aligned}$$
egyenletrendszer megoldásszámát az a valós paraméter függvényében.
5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = (t^2 + t)\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j} + \sqrt{6}t\mathbf{k}$ egyenletű görbe $t \in [1, 2]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felület $z \geq 0$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.
7. Oldja meg az $xy' + y = \sqrt{x}$ differenciálegyenletet $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett.