Matematika szigorlat G (A3) – 2022. január 3.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja a $-\infty$-hez tartó sorozat fogalmát.

   Megoldás. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $-\infty$-hez tart, ha $\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \leq K$.

2. Mondja ki a Rolle-tételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható és $f(a) = f(b)$. Ekkor $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

3. Definiálja az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ térvektorok vektoriális szorzatát.

   Megoldás. $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, amely merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra, hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\gamma$, ahol γ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög, és amelyre teljesül, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

4. Definiálja egy kétváltozós függvény iránymenti deriváltját.

   Megoldás. Az f kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli, az $\mathbf{e} = (e_x, e_y)$ egységvektor irányában vett iránymenti deriváltja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + te_x, y_0 + te_y)\big|_{t=0}$.

5. Definiálja egy vektortér generátorrendszerének fogalmát.

   Megoldás. A V vektortér egy S részhalmaza generátorrendszer, ha V minden eleme előáll S-beli vektorok lineáris kombinációjaként.

6. Ismertesse a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

7. Definiálja az örvénymentesség fogalmát.

   Megoldás. Egy $\mathbf{u}$ vektormező örvenymentes, ha $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

   Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik olyan $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)$ teljesül.

10. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

    Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = n \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right)$$
$$b_n = n\left(\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2+3}\right)$$

Megoldás. A logaritmusfüggvény folytonos, tehát

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n \\
&= \ln \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n \\
&= \ln e^{-1/3} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2+3}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \frac{(n^2+5)-(n^2+3)}{\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n^2+3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = 1.
\end{aligned}$$

2. Végezze el az $f(x) = e^{\tan x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$, nem páros, nem páratlan, periodikus, periódusa π, nincs zérushelye.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi+} e^{\tan x} = 0$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi-} e^{\tan x} = \infty.$$

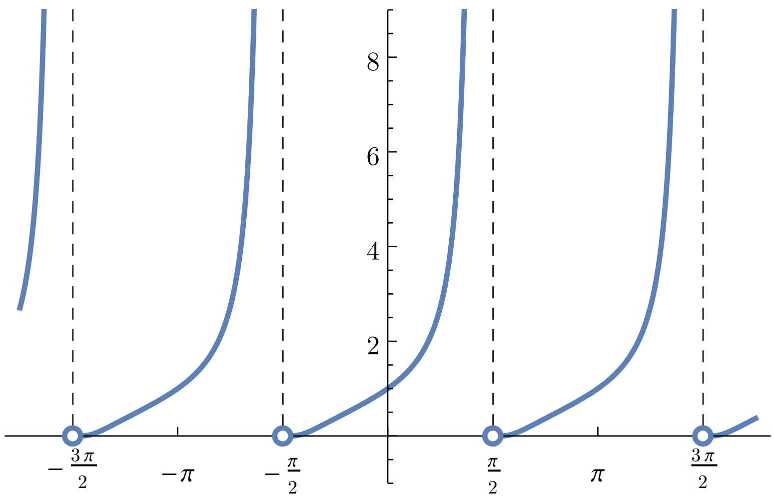
A deriváltak

$$f'(x) = e^{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$f''(x) = e^{\tan x}\frac{1}{\cos^4 x} + 2e^{\tan x}\frac{\sin x}{\cos^3 x} = \frac{e^{\tan x}(1+2\sin x\cos x)}{\cos^4 x}.$$

Az első deriváltnak nincs zérushelye, f'' zérushelyei $1+\sin 2x = 0$ gyökei, azaz $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Az előjelek:

	$-\frac{\pi}{2}$	$(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$	$-\frac{\pi}{4}$	$(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$
f	X	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	X
f'	X	$+$	$+$	$+$	X
f''	X	$+$	0	$+$	X

Mivel f periodikus (és nem konstans), nincs ferde aszimptota. $R_f = (0, \infty)$, grafikon:



3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ sor összegfüggvényét.

Megoldás. Mivel a hatványsort a konvergenciatartományon belül tagonként lehet deriválni,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}.$$

Az eredeti hatványsor összegfüggvénye ennek azon primitív függvénye, ami a 0 helyen a 0 értéket veszi fel. Az integráláshoz parciális törtekre bontunk:

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

azaz

$$\begin{aligned} -1 &= A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1) \\ &= (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D). \end{aligned}$$

Az együtthatók összehasonlításával kapott egyenletrendszer megoldása $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = \frac{1}{2}$, tehát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}.$$

Ebből integrálással

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = -\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\arctan x$$

adódik.

4. Számítsa ki az $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ integrált.

Megoldás. Az integrandus x szerinti primitív függvénye nem elemi függvény, emiatt az integrálok felcserélésével próbálkozunk. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le y \le 4, \sqrt{y} \le x \le 2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^2\right\}$ felhasználásával

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_0^2 3x^2(1+x^3)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{(1+x^3)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3}(3-1) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\mathbf{i} + e^{-t}\sin t\mathbf{j}$ egyenletű görbe $t \in [0,\infty)$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.

Megoldás. A derivált abszolútértéke

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}(t)| &= |(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)\mathbf{i} + (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)\mathbf{j}| \\ &= \sqrt{(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)^2 + (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)\mathbf{k}} = \sqrt{2}e^{-t}. \end{aligned}$$

Az ívhossz

$$\int_0^{\infty} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\lim_{\omega\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^{\omega} = \sqrt{2}.$$

6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = 2x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2+y^2+z^2-2z = 0$ egyenletű felületen kifelé mutató irányítás mellett.

Megoldás. A felület egyenlete átrendezve $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, tehát a $(0, 0, 1)$ középpontú, 1 sugarú gömb. Mivel a felület zárt és $\mathbf{u}$ mindenhol folytonosan differenciálható, alkalmazhatjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt. A vektormező divergenciája

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) = 4x + x - y = 5x - y,$$

a gömb szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \sin\vartheta \cos\varphi \mathbf{i} + r \sin\vartheta \sin\varphi \mathbf{j} + (1 + r\cos\vartheta)$ $(r \in [0, 1],\ \vartheta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi])$, a Jacobi-determináns $r^2 \sin\vartheta$. A keresett integrál

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 (5r\sin\vartheta\cos\varphi - r\sin\vartheta\sin\varphi) r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \\ &= 5 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi}_{0} \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \int_0^1 r^3 \, \mathrm{d}r - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi}_{0} \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \int_0^1 r^3 \, \mathrm{d}r = 0.\end{aligned}$$

7. Határozza meg $y'' + 4y' + 5y = \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 5$, ennek gyökei $-2 \pm i$. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x} \cos x + Be^{-2x} \sin x$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = C\cos x + D\sin x$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C\sin x + D\cos x \\ y''(x) &= -C\cos x - D\sin x, \end{aligned}$$

   az egyenletbe behelyettesítve

$$(4C + 4D)\cos x + (-4C + 4D)\sin x = \cos x$$

   adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $4C+4D = 1$ és $-4C+4D = 0$. Az egyenletrendszer megoldása $C = D = \frac{1}{8}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = \frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x + Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x$.