Matematika szigorlat G (A3) – 2022. január 3.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja a $-\infty$-hez tartó sorozat fogalmát.
2. Mondja ki a Rolle-tételt.
3. Definiálja az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ térvektorok vektoriális szorzatát.
4. Definiálja egy kétváltozós függvény iránymenti deriváltját.
5. Definiálja egy vektortér generátorrendszerének fogalmát.
6. Ismertesse a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.
7. Definiálja az örvénymentesség fogalmát.
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?
10. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.
$$a_n = n \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right)$$
$$b_n = n\left(\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2+3}\right)$$
2. Végezze el az $f(x) = e^{\tan x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ sor összegfüggvényét.
4. Számítsa ki az $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ integrált.
5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\,\mathbf{i} + e^{-t}\sin t\,\mathbf{j}$ egyenletű görbe $t \in [0,\infty)$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.
6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = 2x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2+y^2+z^2-2z=0$ egyenletű felületen kifelé mutató irányítás mellett.
7. Határozza meg $y'' + 4y' + 5y = \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.