Matematika szigorlat G (A3) – 2022. január 10.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

   Megoldás. $r(\cos\varphi + i\varphi)$, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$.

2. Definiálja, hogy mit jelent, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a baloldali határértéke $-\infty$.

   Megoldás. $\forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) < K$.

3. Hogyan jellemezhető egy egyszer differenciálható függvény konvexitása az első derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton nő.

4. Írja fel a geometriai (=mértani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?

   Megoldás. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, pontosan akkor konvegens, ha $|q| < 1$, ekkor az összege $\frac{a}{1-q}$.

5. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.

   Megoldás. Legyen V vektortér a K test felett felett, $L : V \to V$ lineáris transzformáció. A $\mathbf{v} \in V$ vektor az L lineáris transzformáció $\lambda \in K$ sajátértékhez tartozó sajátvektora, ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$.

6. Adjon szükséges és elégséges feltételt homogén lineáris egyenletrendszer megoldásának egyértelműségére az együtthatómátrix rangja segítségével.

   Megoldás. A megoldás akkor egyértelmű, ha az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával.

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, \mathrm{d}t$.

9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

    Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-zx} \, \mathrm{d}z$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3+2} - n}{n\sqrt{4n+1} + 2n}$$
$$b_n = \left(1 + \frac{2n}{n^2+7}\right)^{3n-2}$$

Megoldás. $n^{3/2}$-nel egyszerűsítünk:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+2} - n}{n\sqrt{4n+1} + 2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2n}{n^2+7}\right)^{3n-2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2n}{n^2+7}\right)^{\frac{n^2+7}{2n}}\right]^{\frac{2n(3n-2)}{n^2+7}} = e^6.\end{aligned}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int e^{3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Parciális integrálással

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{3x}}{3}\cos(2x) - \int \frac{e^{3x}}{3}(-2\sin(2x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^{3x}}{3}\cos(2x) - \left(\frac{e^{3x}}{9}(-2\sin(2x)) - \int \frac{e^{3x}}{9}(-4\cos(2x))\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x) + \frac{2}{9}e^{3x}\sin(2x) - \frac{4}{9}\int e^{3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

amiből átrendezve

$$\int e^{3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{13}e^{3x}\cos(2x) + \frac{2}{13}e^{3x}\sin(2x) + C.$$

3. Határozza meg az $f(x) = \cos x$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{4}$ középpontú Taylor-sorát és mutassa meg, hogy annak összegfüggvénye az egész számegyenesen f.

Megoldás. f deriváltjai és azok helyettesítési értékei

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\sin x & f'(\tfrac{\pi}{4}) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f''(x) &= -\cos x & f''(\tfrac{\pi}{4}) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f'''(x) &= \sin x & f'''(\tfrac{\pi}{4}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f^{(4)}(x) &= \cos x = f(x) & f^{(4)}(\tfrac{\pi}{4}) &= \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

mivel $f^{(4)} = f$, a további deriváltakat ebből leolvashatjuk: $f^{(n)}(\frac{\pi}{4}) = (-1)^{n(n+1)/2}\frac{1}{\sqrt{2}}$. A Taylor-sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n.$$

Az n. részletösszeghez tartozó maradéktag becsléséhez felhasználjuk, hogy $|f^{(n+1)}(\xi)| \le 1$:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\right| \le \frac{\left|x - \frac{\pi}{4}\right|^{n+1}}{(n+1)!},$$

ami minden $x \in \mathbb{R}$ esetén nullához tart, ha $n \to \infty$, tehát a sor összegfüggvénye mindenhol f.

4. Hol vannnak és milyen típusúak az $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{1+8x^2+y^2}$ függvény lokális szélsőértékei?

   Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= \frac{2x(1+8x^2+y^2)-(x^2+y)\cdot 16x}{(1+8x^2+y^2)^2} = \frac{2x(1-8y+y^2)}{(1+8x^2+y^2)^2} \\
f'_y(x,y) &= \frac{1+8x^2+y^2-(x^2+y)\cdot 2y}{(1+8x^2+y^2)^2} = \frac{1+8x^2-2x^2y-y^2}{(1+8x^2+y^2)^2},
\end{aligned}
$$

   f'_x akkor nulla, ha $x=0$ vagy $y=4\pm\sqrt{15}$. Ha $x=0$, akkor az $f'_y(x,y)=0$ egyenletbe helyettesítve $1-y^2=0$, azaz $y=\pm 1$ adódik. Ha viszont $y=4\pm\sqrt{15}$, akkor az y szerinti derivált zérushelyére a $2\sqrt{15}x^2+8\sqrt{15}\pm 30=0$ egyenlet adódik, aminek egyik előjelnél sincs valós gyöke. Tehát a stacionárius pontok $(0,1)$ és $(0,-1)$.
   A Hesse-mátrix

$$
\begin{aligned}
H(x,y) &= \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2(1-8y+y^2)(1+8x^2+y^2)^2-2x(1-8y+y^2)\cdot 2(1+8x^2+y^2)\cdot 16x}{(1+8x^2+y^2)^4} & 2x\frac{(-8+2y)(1+8x^2+y^2)^2-(1-8y+y^2)\cdot 2(1+8x^2+y^2)\cdot 2y}{(1+8x^2+y^2)^4} \\ 2x\frac{(-8+2y)(1+8x^2+y^2)^2-(1-8y+y^2)\cdot 2(1+8x^2+y^2)\cdot 2y}{(1+8x^2+y^2)^4} & \frac{(-2x^2-2y)(1+8x^2+y^2)^2-(1+8x^2-2x^2y-y^2)\cdot 2(1+8x^2+y^2)\cdot 2y}{(1+8x^2+y^2)^4} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

   a stacionárius pontokban

$$
\begin{aligned}
H(0,1) &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
H(0,-1) &= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

   tehát $(0,1)$ lokális maximumhely, $(0,-1)$ lokális minimumhely.

5. Integrálja az $f(x,y,z)=(x+y)^2-2z$ skalármezőt az $\mathbf{r}(u,v)=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+uv\mathbf{k}$ felület $u^2+v^2\le 1$ paramétertartománynak megfelelő darabján.

   Megoldás. A parciális deriváltak vektoriális szorzatának abszolútértéke

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| &= |(\mathbf{i}+v\mathbf{k})\times(\mathbf{j}+u\mathbf{k})| \\
&= |-v\mathbf{i}-u\mathbf{j}+\mathbf{k}| = \sqrt{1+u^2+v^2}.
\end{aligned}
$$

   A skalármező értéke a felületen $f(\mathbf{r}(u,v))=(u+v)^2-2uv=u^2+v^2$. Az integrált polárkoordinákra áttérve számoljuk: $u=r\cos\phi$, $v=r\sin\phi$, a Jacobi-determináns r, a paramétertartomány $r\in[0,1]$, $\phi\in[0,2\pi]$. A skalármező integrálja így

$$
\begin{aligned}
\int_S f\,\mathrm{d}S &= \iint_{\{(u,v)|u^2+v^2\le 1\}} f(\mathbf{r}(u,v))\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \iint_{\{(u,v)|u^2+v^2\le 1\}} (u^2+v^2)\sqrt{1+u^2+v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi\int_0^1 \frac{r^2}{2}2r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left(\left[\frac{r^2}{2}\frac{2}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^1 - \int_0^1 r\cdot\frac{2}{3}(1+r^2)^{3/2}\,\mathrm{d}r\right) \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{15}\left(r^2+1\right)^{3/2}\left(3r^2-2\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{4\pi}{15}\left(1+\sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$

6. Oldja meg a $2xy+(x^2+3y^2+1)y'=0$ differenciálegyenletet $y(0)=1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú, ahol

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

tehát egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_0^y (x^2 + 3\eta^2 + 1)\,\mathrm{d}\eta = x^2 y + y^3 + y, \end{aligned}$$

az egyenlet általános megoldása $u(x, y(x)) = C$. A kezdeti feltétel szerint $C = u(0, y(0)) = u(0,1) = 1$, tehát a kezdetiérték-probléma megoldása implicit alakban $(x^2+1)y(x) + y(x)^3 = 1$.

7. Oldja meg az $y'' + y' = x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + \lambda = (\lambda)(\lambda+1)$, tehát a gyökök 0 és -1. A homogén egyenlet általános megoldása $A + Be^{-x}$.
Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = x(C_0 + C_1 x)$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_0 + 2C_1 x \\ y''(x) &= 2C_1, \end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$2C_1 + C_0 + 2C_1 x = x$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $C_1 = \frac{1}{2}$ és $C_0 = -1$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = -x + \frac{1}{2}x^2 + A + Be^{-x}$. A deriváltfüggvény $y'(x) = -1 + x - Be^{-x}$, a kezdeti feltétel

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A + B \\ 0 &= y'(0) = -1 - B, \end{aligned}$$

a kapott egyenletrendszer megoldása $B = -1$, $A = 1$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $y(x) = -x + \frac{1}{2}x^2 + 1 - e^{-x}$.