

Matematika szigorlat G (A3) – 2022. január 10.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.
2. Definiálja, hogy mit jelent, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a baloldali határértéke $-\infty$.
3. Hogyan jellemezhető egy egyszer differenciálható függvény konvexitása az első derivált segítségével?
4. Írja fel a geometriai (=mértani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?
5. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.
6. Adjon szükséges és elégséges feltételt homogén lineáris egyenletrendszer megoldásának egyértelműségére az együtthatómátrix rangja segítségével.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
10. Definiálja az $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3 + 2} - n}{n\sqrt{4n + 1} + 2n}$$
$$b_n = \left(1 + \frac{2n}{n^2 + 7}\right)^{3n-2}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int e^{3x} \cos(2x) dx$$

3. Határozza meg az $f(x) = \cos x$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{4}$ középpontú Taylor-sorát és mutassa meg, hogy annak összegfüggvénye az egész számegyenesen f .
4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{1 + 8x^2 + y^2}$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Integrálja az $f(x, y, z) = (x + y)^2 - 2z$ skalármezőt az $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$ felület $u^2 + v^2 \leq 1$ paramétertartománynak megfelelő darabján.
6. Oldja meg a $2xy + (x^2 + 3y^2 + 1)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
7. Oldja meg az $y'' + y' = x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.