Matematika szigorlat G (A3) – 2022. január 17.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$.

3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát.

   Megoldás. Egy f_n függvénysor a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és összegfüggvénye ott s, ha $\forall\epsilon\exists N_0 \in \mathbb{N}\forall x\forall n \geq N_0 : |s(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| < \epsilon$.

5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.

   Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots \alpha_k\mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

6. Írja fel az $f(x, y)$ kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.

   Megoldás.

$$f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ + \frac{1}{2}f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}f''_{yy}(y - y_0)^2$$

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) megadott felületdarab felszínét?

   Megoldás. $\displaystyle\iint_D \left|\frac{\partial\mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u, v)}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

   Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

    Megoldás. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$ lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete az $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenlet. Ha ennek gyökei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, multiplicitásuk rendre $m_1, \ldots, m_r$, akkor a differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisa $e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x}, \ldots, x^{m_r-1}e^{\lambda_r x}$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = (0, \infty)$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushelye $x = 1$.

$$\lim_{x\to 0+} e^{\tan x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to \infty} e^{\tan x} = 0.$$

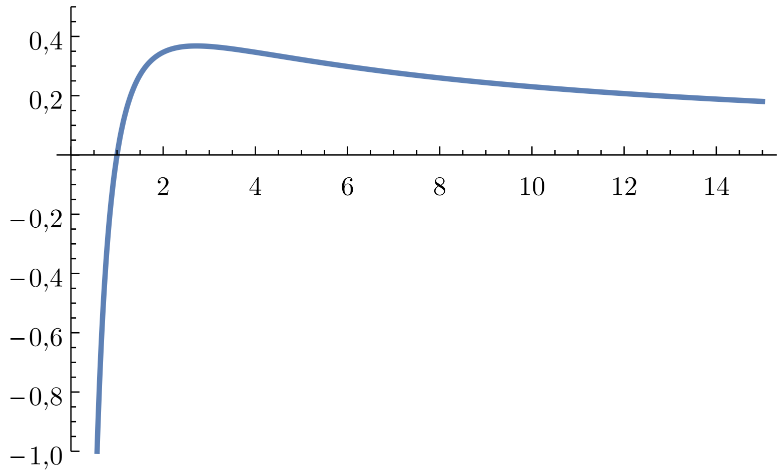
   A deriváltak

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$
$$f''(x) = -2\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^3} + 2\frac{\ln x}{x^3} = -\frac{3}{x^3} + 2\frac{\ln x}{x^3}.$$

   Az első derivált zérushelye e, a második derivált zérushelye $e^{3/2}$. Az előjelek:

	$(0,e)$	e	$(e,e^{3/2})$	$e^{3/2}$	$(e^{3/2},\infty)$
f		max		infl	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$

   Láttuk, hogy vízszintes aszimptota van. $R_f = (0, f(e)] = (0, \frac{1}{e}]$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^\omega \frac{2x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\lim_{\omega\to\infty}\left[\arctan x^2\right]_0^\omega\\ &= \frac{1}{2}\lim_{\omega\to\infty}\arctan\omega^2 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n}{2^n}$ sor összegét.

   Megoldás. Ha $x \in (0,1)$, akkor

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^\infty x^n = \sum_{n=0}^\infty n x^{n-1}.$$

   Az $x = -\frac{1}{2}$ értéket behelyettesítve

$$\frac{4}{9} = -2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n}{2^n}$$

adódik, tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n} = -\frac{2}{9}.$$

4. Határozza meg az

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + ax_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásszámát az a valós paraméter függvényében.

Megoldás. Az egyenletrendszer homogén lineáris, tehát vagy egy vagy végtelen sok megoldása van aszerint, hogy az együtthatómátrix rangja egyenlő vagy kisebb mint az ismeretlenek száma. A rang meghatározásához a mátrixot sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & a & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & a+2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & a-7 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & -3 & \\ 0 & 0 & 9 & \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

Ebben az alakban látjuk, hogy a rang 3, ha $a = -\frac{1}{5}$, egyébként 4. Tehát az egyenletrendszernek $a \neq -\frac{1}{5}$ esetén egy megoldása van, $a = -\frac{1}{5}$ esetén pedig végtelen sok.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ vektormezőt az $ABCD$ négyzeten, ha $A = (1, -1)$, $B = (1, 1)$, $C = (-1, 1)$, $D = (-1, -1)$.

Megoldás. Az egyes oldalak irányításnak megfelelő paraméterezése, a derivált és a vektormező értéke az adott szakaszon

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}_{AB}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} && \dot{\mathbf{r}}_{AB}(t) = \mathbf{j} && \mathbf{u}(\mathbf{r}_{AB}(t)) = \frac{-t\mathbf{i} + \mathbf{j}}{1+t^2} \\ &\mathbf{r}_{BC}(t) = -t\mathbf{i} + \mathbf{j} && \dot{\mathbf{r}}_{BC}(t) = -\mathbf{i} && \mathbf{u}(\mathbf{r}_{BC}(t)) = \frac{-\mathbf{i} - t\mathbf{j}}{1+t^2} \\ &\mathbf{r}_{CD}(t) = -\mathbf{i} - t\mathbf{j} && \dot{\mathbf{r}}_{CD}(t) = -\mathbf{j} && \mathbf{u}(\mathbf{r}_{CD}(t)) = \frac{t\mathbf{i} - \mathbf{j}}{1+t^2} \\ &\mathbf{r}_{DA}(t) = t\mathbf{i} - \mathbf{j} && \dot{\mathbf{r}}_{DA}(t) = \mathbf{i} && \mathbf{u}(\mathbf{r}_{DA}(t)) = \frac{\mathbf{i} + t\mathbf{j}}{1+t^2}, \end{aligned}$$

a t paraméter mindegyik szakaszon -1-től 1-ig változik. A vektormező integrálja

$$\begin{aligned} \int_{ABCD} \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{-1}^{1} \mathbf{u}(\mathbf{r}_{AB}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}_{AB}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \mathbf{u}(\mathbf{r}_{BC}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}_{BC}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{-1}^{1} \mathbf{u}(\mathbf{r}_{CD}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}_{CD}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \mathbf{u}(\mathbf{r}_{DA}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}_{DA}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 4\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4\left[\arctan t\right]_{-1}^{1} = 4\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\pi. \end{aligned}$$

6. Oldja meg az $y' = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Mindkét oldalt integráljuk 0-tól x-ig:

$$\left[\operatorname{arsinh}(y(\xi))\right]_0^x = \int_0^x \frac{y'(\xi)}{\sqrt{1+y(\xi)^2}}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi = \left[\sqrt{1+\xi^2}\right]_0^x,$$

tehát

$$\operatorname{arsinh}(y(x)) - \operatorname{arsinh} 0 = \sqrt{1+x^2} - 1,$$

amiből $y(x) = \sinh(\sqrt{1+x^2} - 1)$.

7. Határozza meg a $\sqrt{x}y' + y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

   integrálásával $\ln|y(x)| = -2\sqrt{x} + C$, vagyis $y(x) = Ce^{-2\sqrt{x}}$ adódik.
   Az inhomogén egyenlet megoldását az állandó variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)e^{-2\sqrt{x}}$ alakban keressük, behelyettesítve a

$$\sqrt{x}c'(x)e^{-2\sqrt{x}} + \sqrt{x}c(x)e^{-2\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + c(x)e^{-2\sqrt{x}} = x$$

   egyenlethez jutunk, amiből $c'(x) = \sqrt{x}e^{2\sqrt{x}}$ következik. $x = u^2$, $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ helyettesítéssel, majd parciálisan integrálunk:

$$\begin{aligned}
c(x) &= \int \sqrt{x}e^{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int ue^{2u} \cdot 2u\,\mathrm{d}u \\
&= \int 2u^2e^{2u}\,\mathrm{d}u \\
&= u^2e^{2u} - \int 2ue^{2u}\,\mathrm{d}u \\
&= u^2e^{2u} - \left(ue^{2u} - \int e^{2u}\,\mathrm{d}u\right) \\
&= u^2e^{2u} - ue^{2u} + \frac{1}{2}e^{2u} \\
&= xe^{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}e^{2\sqrt{x}} + C.
\end{aligned}$$

   Az általános megoldás tehát

$$y(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} + Ce^{-2\sqrt{x}}. \tag{1}$$