**Matematika szigorlat G (A3)** – 2022. január 17.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.
3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
4. Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát.
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
6. Írja fel az $f(x, y)$ kétváltozós függvény $(x_0, y_0)$ pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) megadott felületdarab felszínét?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?
10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$ sor összegét.
4. Határozza meg az

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + ax_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásszámát az $a$ valós paraméter függvényében.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ vektormezőt az $ABCD$ négyzeten, ha $A = (1, -1)$, $B = (1, 1)$, $C = (-1, 1)$, $D = (-1, -1)$.
6. Oldja meg az $y' = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg a $\sqrt{x}y' + y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását.