Matematika szigorlat G (A3) – 2022. január 24.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.

   Megoldás. A komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Ha $r \neq 0$, akkor pontosan n darab n. gyöke van, ezek $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.

   Megoldás. Ha f és g olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban és f differenciálható a $g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az x_0 pontban és $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0, b]$ intervallumon, ahol $0 \leq b$, és létezik a $\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és ∞ közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Írja fel a geometriai (=mértani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?

   Megoldás. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, pontosan akkor konvegens, ha $|q| < 1$, ekkor az összege $\frac{a}{1-q}$.

5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.

   Megoldás. $f(x, y)$ differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha léteznek olyan A_x, A_y számok, amellyel

   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A_x(x - x_0) - A_y(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező vektorpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon vektorpotenciál.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Írja fel az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

    Megoldás. $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, ahol $a_0, \ldots, a_n, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushelye.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 - 5x} = 0$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - 5x} = 0$$
$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^2 - 5x} = \infty$$
$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2 - 5x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 5-} \frac{1}{x^2 - 5x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 5+} \frac{1}{x^2 - 5x} = \infty.$$

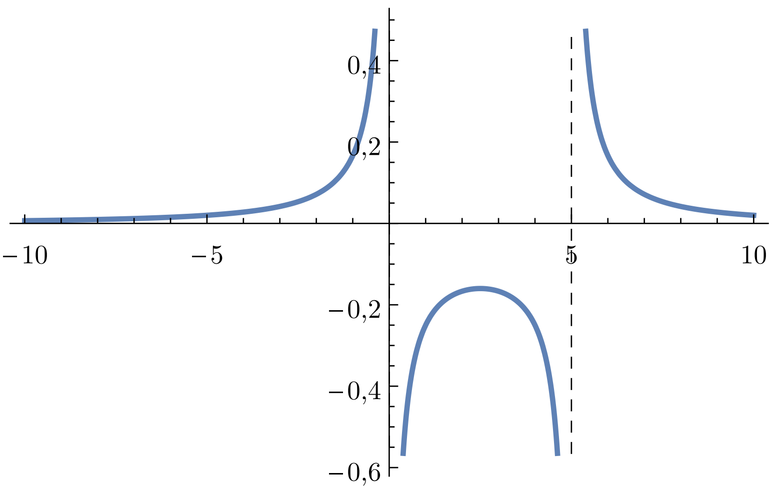
   A deriváltak

$$f'(x) = \frac{5 - 2x}{(x^2 - 5x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{-2(x^2 - 5x)^2 - (5 - 2x) \cdot 2(x^2 - 5x)(2x - 5)}{(x^2 - 5x)^4} = \frac{2(3x^2 - 15x + 25)}{(x^2 - 5x)^3}.$$

   Az első derivált zérushelye $\frac{5}{2}$, a második deriváltnak nincs zérushelye. Az előjelek:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{5}{2})$	$\frac{5}{2}$	$(\frac{5}{2}, 5)$	5	$(5, \infty)$
f	╯	X	╭	max	╮	X	╰
f'	$+$	X	$+$	0	$-$	X	$-$
f''	$+$	X	$-$	$-$	$-$	X	$+$

   Láttuk, hogy mindkét irányban vízszintes aszimptota van. $R_f = (-\infty, -\frac{4}{25}] \cup (0, \infty)$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int x^2 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

Megoldás. $x = \sin u$ helyettesítést alkalmazunk, $1 - x^2 = \cos^2 u$, $\mathrm{d}x = \cos u \,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sin^2 u \cos^2 u \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\int \sin^2(2u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4u)}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{8}\left(u - \frac{\sin(4u)}{4}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\arcsin x - \frac{\sin(4\arcsin x)}{4}\right) + C \\
&= \frac{1}{8}\arcsin x + \frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}(2x^2-1) + C
\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\sqrt{n}}(x+3)^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. Az R konvergenciasugár Cauchy–Hadamard-tétel szerint az $a_n = \frac{(-2)^n}{n\sqrt{n}}$ együtthatókkal kifejezhető:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n\sqrt{n}}} = 2,$$

tehát a konvergenciasugár $R = \frac{1}{2}$. A hatványsor középpontja -3, tehát a konvergenciaintervallum két végpontja $-\frac{7}{2}$ és $-\frac{5}{2}$, még ezeket kell megvizsgálni. Mivel

$$\sum_{n=7}^{\infty}\left|\frac{(-2)^n}{n\sqrt{n}}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} < \infty,$$

mindkét végpontban abszolút konvergens és így konvergens. A konvergenciatartomány tehát $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]$.

4. Határozza meg azon 2π szerint periodikus f függvény Fourier-sorát, amelyre $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $f(x) = e^{-|x|}$ teljesül.

Megoldás. Mivel f páros, a Fourier-sora nem tartalmaz szinuszos tagokat. Az együtthatók

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-e^{-x}\right]_0^{\pi} = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-e^{-x}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-e^{-x})(-\sin(nx))n\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-e^{-x}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \left(\left[e^{-x}(-\sin(nx))n\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(e^{-x})(-\cos(nx))n^2\,\mathrm{d}x\right)\right) \\
&= -\frac{2}{\pi}((-1)^n e^{-\pi} - 1) - n^2 a_n,
\end{aligned}$$

tehát

$$a_n = \frac{2}{\pi}(1-(-1)^n e^{-\pi})\frac{1}{1+n^2}.$$

A Fourier-sor

$$\frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos(nx).$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sin u \sin v\mathbf{k}$ felület $(u,v) \in [0,\pi] \times [0,\pi]$ darabján $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ irányítás mellett.

   Megoldás. A normálvektor

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= (\mathbf{i} + \cos u \sin v\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + \sin u \cos v\mathbf{k}) \\ &= -\cos u \sin v\mathbf{i} - \sin u \cos v\mathbf{j} + \mathbf{k},\end{aligned}$$

   a vektormező értéke a felületen $\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, az integrál

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^\pi \int_0^\pi \mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi (-\cos u \sin v + 1)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= -\int_0^\pi \cos u\,\mathrm{d}u \int_0^\pi \sin v\,\mathrm{d}v + \pi^2 = \pi^2.\end{aligned}$$

6. Határozza meg az $xy^3 - 1 + (\sqrt{1+x^2} + 3y^2 + 3x^2y^2)y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. A differenciálegyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' =$ alakú, ahol $P(x,y) = xy^3 - 1$ és $Q(x,y) = \sqrt{1+x^2} + 3y^2 + 3x^2y^2$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= 3xy^2 \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 6xy^2,\end{aligned}$$

   tehát az egyenlet nem egzakt. Létezik csak az x változótól függő multiplikátor:

$$\begin{aligned}\ln|M(x)| &= \int \frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 3xy^2}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 6xy^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,\end{aligned}$$

   tehát $M(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ integráló tényező. Az egyenlet ezzel megszorozva már egzakt:

$$\frac{xy^3 - 1}{\sqrt{1+x^2}} + (1 + 3\sqrt{1+x^2}y^2)y' = 0.$$

   Egy potenciál

$$u(x,y) = \int_0^x \left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x + \int_0^y \left(1 + 3\sqrt{1+x^2}\eta^2\right)\mathrm{d}\eta = -\operatorname{arsinh} x + y + \sqrt{1+x^2}y^3.$$

   A differenciálegyenlet általános megoldása implicit alakban $-\operatorname{arsinh} x + y(x) + \sqrt{1+x^2}y(x)^3 = C$.

7. Határozza meg az $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$ függvény Laplace-transzformáltját.

   Megoldás. $f(x)$ folytonos és korlátos $x > 0$ esetén, tehát a Laplace-transzformált létezik pozitív valós részű argumentumokra.
   $xf(x)$ Laplace-transzformáltja egyrészt $-(\mathcal{L}f)'$, másrészt táblázat alapján

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}.$$

   Ebből integrálással adódik, hogy

$$(\mathcal{L}f)(z) = -\int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\mathrm{d}z = -\ln z + \ln(z+1) + C = \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) + C.$$

   A konstans meghatározásához felhasználjuk, hogy $\lim_{z\to\infty}(\mathcal{L}f)(z) = 0$, ebből $C = 0$ következik, tehát $(\mathcal{L}f)(z) = \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)$.