Matematika szigorlat G (A3) – 2022. január 24.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.
2. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.
3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.
4. Írja fel a geometriai (=mértani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?
5. Definiálja a (valós vagy komplex) vektortér fogalmát.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező vektorpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Írja fel az n-edrendű lineáris differenciálegyenletek általános alakját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int x^2 \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x$$
3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\sqrt{n}} (x+3)^n$ hatványsor konvergenciatartományát.
4. Határozza meg azon 2π szerint periodikus f függvény Fourier-sorát, amelyre $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $f(x) = e^{-|x|}$ teljesül.
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sin u \sin v\mathbf{k}$ felület $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ darabján $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ irányítás mellett.
6. Határozza meg az $xy^3 - 1 + (\sqrt{1 + x^2} + 3y^2 + 3x^2y^2)y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Határozza meg az $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$ függvény Laplace-transzformáltját.