Matematika szigorlat G (A3) – 2022. május 23.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $\sqrt{3}+i$ számot.

   Megoldás. A trigonometrikus alak $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

2. Definiálja a $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ módon jelölt fogalmat.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat határértéke $-\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \leq K$.

3. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a,b]$, amire $f(x) = y$.

4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?

   Megoldás. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x\right)$, ahol

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

   Megoldás. Pontosan akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.

   Megoldás. $f(x,y)$ differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha léteznek olyan A_x, A_y számok, amellyel

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A_x(x-x_0) - A_y(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

    Megoldás. Egy $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)$ és $Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushelye.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{-x}+1} = 1.$$

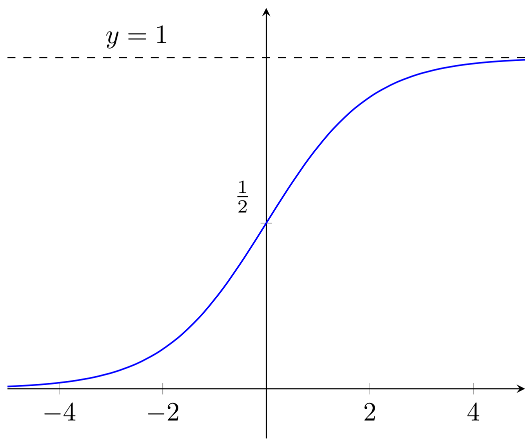
   A deriváltak

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}.$$

   Az első derivált sehol nem nulla, a második derivált zérushelye $x = 0$. Az előjelek:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f	$\smile$	infl	$\frown$
f'	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	0	$-$

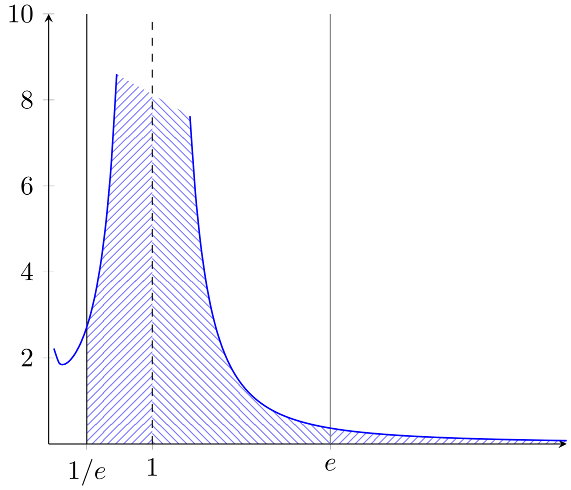
   Láttuk, hogy mindkét irányban vízszintes aszimptota van. $R_f = (0, 1)$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_{1/e}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. Mivel az integrandus az 1 pontban végtelenhez tart, az integrálási tartományt három részre bontjuk (e helyett bármilyen 1-nél nagyobb szám megfelel):



$$
\begin{aligned}
\int_{1/e}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\omega\to 1-}\int_{1/e}^{\omega}\frac{1}{x}\ln^{-2}x\,\mathrm{d}x + \lim_{\alpha\to 1+}\int_{\alpha}^{e}\frac{1}{x}\ln^{-2}x\,\mathrm{d}x + \lim_{\omega\to\infty}\int_{e}^{\omega}\frac{1}{x}\ln^{-2}x\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\omega\to 1-}\left[\frac{\ln^{-1}x}{-1}\right]_{1/e}^{\omega} + \lim_{\alpha\to 1+}\left[\frac{\ln^{-1}x}{-1}\right]_{\alpha}^{e} + \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{\ln^{-1}x}{-1}\right]_{e}^{\omega} \\
&= \lim_{\omega\to 1-}\left(-\frac{1}{\ln\omega}-1\right) + \lim_{\alpha\to 1+}\left(-1+\frac{1}{\ln\alpha}\right) + \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln\omega}+1\right)_{e}^{\omega} \\
&= \infty+\infty+1=\infty.
\end{aligned}
$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{3^n}$ sor összegét.

   Megoldás. Használjuk a mértani sor második deriváltját. $|x|<1$ esetén

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sum_{n=0}^{\infty} x^{n} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{1-x} \qquad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^3},
\end{aligned}
$$

   tehát

$$
\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.
$$

   A megadott sor $x=\frac{1}{3}$ helyettesítéssel adódik, összege $\frac{3}{4}$.

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}
$$

   Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda-2 & 3 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)(\lambda^2-1),
\end{aligned}
$$

   tehát a sajátértékek ± 1 és $\pm i$. Mivel minden sajátérték multiplicitása 1, létezik sajátvektorokból álló bázis.

A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - (-1) \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - i \cdot I = \begin{bmatrix} -1-i & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-i & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2-i \end{bmatrix} \overset{s_2-(1+i)s_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1-i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-i & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1-i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1-i & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
Mivel A valós, a $-i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az i sajátértékhez tartozó sajátvektorok konjugáltjai, azaz $\begin{bmatrix} 1+i & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.

5. Integrálja az $f(x, y, z) = \sqrt{2}xy$ függvényt az $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ paraméteres egyenletű görbe $t \in [0, \pi/2]$ paraméterértékeknek megfelelő darabján.

   Megoldás. A paraméterezés deriváltjának abszolútértéke

   $$|\dot{r}(t)| = |-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2},$$

   a függvény értéke a görbén $f(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{2}\cos t \sin t$. Az integrál

   $$\begin{aligned} \int f \,\mathrm{d}s &= \int_0^{\pi/2} f(\mathbf{r}(t))|\dot{r}(t)| \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}\cos t \sin t \sqrt{2} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin 2t \,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

6. Oldja meg a $\cosh(y)y' = \sinh(y)\tanh(x)$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet szétválasztható: $\frac{\cosh y}{\sinh y}y' = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, mindkét oldalt integráljuk:

   $$\ln \sinh(y(x)) = \int \frac{\cosh y}{\sinh y} y' \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} \,\mathrm{d}x = \ln \cosh(x) + C.$$

   Ebből az általános megoldás $y(x) = \operatorname{arsinh}(C \cosh x)$. A kezdeti feltétel alapján $1 = y(0) = \operatorname{arsinh}(C)$, tehát $C = \sinh(1)$, így a kezdetiérték-probléma megoldása

   $$y(x) = \operatorname{arsinh}(\sinh(1)\cosh x).$$

7. Határozza meg az $y'' - 2y' - 3y = x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$, tehát a gyökök -1 és 3. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x} + Be^{3x}$.

Az inhomogén tag polinom, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1 + 2C_2x \\ y''(x) &= 2C_2, \end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$2C_2 - 2(C_1 + 2C_2x) - 3(C_0 + C_1x + C_2x^2) = x^2$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $2C_2 - 2C_1 - 3C_0 = 0$, $-4C_2 - 3C_1 = 0$ és $-3C_2 = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $C_0 = -\frac{14}{27}$, $C_1 = \frac{4}{9}$, $C_2 = -\frac{1}{3}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = -\frac{14}{27} + \frac{4}{9}x - \frac{1}{3}x^2 + Ae^{-x} + Be^{3x}$.