Matematika szigorlat G (A3) – 2022. május 23.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $\sqrt{3} + i$ számot.
2. Definiálja a $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ módon jelölt fogalmat.
3. Mondja ki a Bolzano-tételt.
4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?
5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int_{1/e}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x$$
3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n}$ sor összegét.
4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
5. Integrálja az $f(x, y, z) = \sqrt{2}xy$ függvényt az $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ paraméteres egyenletű görbe $t \in [0, \pi/2]$ paraméterértékeknek megfelelő darabján.
6. Oldja meg a $\cosh(y)y' = \sinh(y)\tanh(x)$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y'' - 2y' - 3y = x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.