Matematika szigorlat G (A3) – 2022. május 31.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Mondja ki a Weierstrass-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, létezik minimuma és maximuma, azaz léteznek $c, d \in [a,b]$ számok, amire minden $x \in [a,b]$ esetén $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

3. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f'' nemnegatív.

4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?

   Megoldás. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x\right)$, ahol

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

5. Definiálja a valós vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{R}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontbeli folytonosságának fogalmát.

   Megoldás. f folytonos (x_0, y_0)-ban, ha $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$.

9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

   Megoldás. Egy $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)$ és $Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

10. Definiálja az $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

    Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n^4 + n^2} - n^2$$
$$b_n = \left(\frac{n!}{n! - (n-1)!} \right)^n$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^4+n^2} - n^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2-n^4}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n! - (n-1)!} \right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \right]^{\frac{n}{n-1}} = e.\end{aligned}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x} + 5} \, \mathrm{d}x$$

Megoldás. $x = u^2$, $\mathrm{d}x = 2u \, \mathrm{d}u$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+5} \, \mathrm{d}x &= \int 2 \frac{u^2}{u^2+2u+5} \, \mathrm{d}u \\ &= \int \left(2 - 2\frac{2u+5}{u^2+2u+5} \right) \mathrm{d}u \\ &= 2u - 2\int \left(\frac{2u+2}{u^2+2u+5} + \frac{3}{u^2+2u+5} \right) \mathrm{d}u \\ &= 2u - 2\ln(u^2+2u+5) - 6\int \frac{1}{(u+1)^2+4} \, \mathrm{d}u \\ &= 2u - 2\ln(u^2+2u+5) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{u+1}{2}\right)^2+1} \, \mathrm{d}u \\ &= 2u - 2\ln(u^2+2u+5) - 3\arctan\left(\frac{u+1}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{x} - 2\ln(x+2\sqrt{x}+5) - 3\arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2} \right) + C.\end{aligned}$$

3. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+1}$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-2x+1} &= \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.\end{aligned}$$

A konvergenciasugár 1, mivel a tagonkénti deriválás nem változtatja meg és a mértani sor $|x| < 1$ esetén konvergens.

4. Hol vannnak és milyen típusúak az $f(x,y,z) = x^2 - x^4 - y^2 - z^2 + yz$ függvény lokális szélsőértékei?

   Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y,z) &= 2x - 4x^3 = 2x(1-2x^2)\\
f'_y(x,y,z) &= -2y + z\\
f'_z(x,y,z) &= -2z + y,
\end{aligned}$$

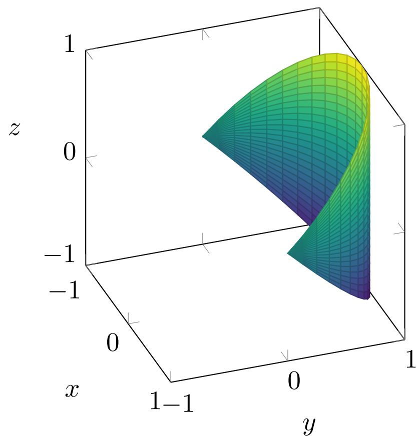
   f'_x akkor 0, ha $x = 0$ vagy $x = \pm 1/\sqrt{2}$, f'_y és f'_z pedig akkor 0 egyszerre, ha $y = z = 0$. A Hesse-mátrix

$$\begin{aligned}
H(x,y,z) &= \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y,z) & f''_{xy}(x,y,z) & f''_{xz}(x,y,z)\\ f''_{yx}(x,y,z) & f''_{yy}(x,y,z) & f''_{yz}(x,y,z)\\ f''_{zx}(x,y,z) & f''_{zy}(x,y,z) & f''_{zz}(x,y,z)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 2-12x^2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

   ha $x = 0$, akkor a mátrix indefinit, tehát a $(0,0,0)$ pontban nyeregpont van, ha $x = \pm 1/\sqrt{2}$, akkor negatív definit, tehát a $(-1/\sqrt{2}, 0, 0)$ és $(1/\sqrt{2}, 0, 0)$ pontokban lokális maximum van.

5. Hol van a tömegközéppontja az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű felület $y \geq 0$, $|z| \leq y$ egyenlőtlenségek által kijelölt darabjának?

   Megoldás. Az alakzat hengerpalást darabja, paraméterezzük $\mathbf{r}(\phi, z) = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ módon, a paramétertartományt meghatározó egyenlőtlenségek $0 \leq \phi \leq \pi$, $-\sin\varphi \leq z \leq \sin\varphi$.



   A normálvektor abszolútértéke

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right| = |(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}) \times \mathbf{k}| = 1.$$

   A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok és a felszín hányadosai. A szükséges integrálok:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \int_{-\sin\phi}^{\sin\phi} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi &= \int_0^\pi 2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = 4\\
\int_0^\pi \int_{-\sin\phi}^{\sin\phi} \cos\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi &= \int_0^\pi 2\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi = 0\\
\int_0^\pi \int_{-\sin\phi}^{\sin\phi} \sin\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi &= \int_0^\pi 2\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = \pi\\
\int_0^\pi \int_{-\sin\phi}^{\sin\phi} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi &= 0,
\end{aligned}$$

   tehát a tömegközéppont helye $\frac{\pi}{4}\mathbf{j}$.

6. Oldja meg a $-x + y + (x+y)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = -3$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

tehát egzakt. Egy potenciál

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^x P(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
&= \int_0^x (-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (x+\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
&= -\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}.
\end{aligned}$$

Az általános megoldás $u(x, y(x)) = C$, a kezdeti feltétel alapján $C = u(0, y(0)) = u(0, -3) = \frac{9}{2}$. Ennek alapján a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(x) = -x - \sqrt{2x^2+9}.$$

7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 4y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2$, tehát a -2 kétszeres gyök (belső rezonancia). A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$.
Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, nincs külső rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = C_0 + C_1x$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}
y'(x) &= C_1 \\
y''(x) &= 0,
\end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$4C_1 + 4C_0 + 4C_1x = x$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $4C_0 + 4C_1 = 0$ és $4C_1 = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $C_0 = -\frac{1}{4}$, $C_1 = \frac{1}{4}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$.