Matematika szigorlat G (A3) – 2022. május 31.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Mondja ki a Weierstrass-tételt.
3. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második derivált segítségével?
4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?
5. Definiálja a valós vektortér fogalmát.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontbeli folytonosságának fogalmát.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?
10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n^4 + n^2} - n^2$$
$$b_n = \left(\frac{n!}{n! - (n-1)!} \right)^n$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x} + 5} \, \mathrm{d}x$$

3. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.
4. Hol vannnak és milyen típusúak az $f(x, y, z) = x^2 - x^4 - y^2 - z^2 + yz$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Hol van a tömegközéppontja az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű felület $y \geq 0$, $|z| \leq y$ egyenlőtlenségek által kijelölt darabjának?
6. Oldja meg a $-x + y + (x + y)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = -3$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 4y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását.