Matematika szigorlat G (A3) – 2022. június 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

2. Definiálja az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0 pontbeli folytonosságát.

   Megoldás. $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható (a, b)-n, deriváltja ott f és f integrálható, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó minoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.

   Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.

   Megoldás. Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor f $\mathbf{e}$ irányú deriváltjának az $\mathbf{r}_0$ pontban a $t \mapsto f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{e})$ függvény 0-beli deriváltját nevezzük.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) megadott felületdarab felszínét?

   Megoldás. $\displaystyle\iint_D \left|\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$.

9. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

   Megoldás. Az $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$ lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete az $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenlet. Ha ennek gyökei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, multiplicitásuk rendre $m_1, \ldots, m_r$, akkor a differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisa $e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x}, \ldots, x^{m_r-1}e^{\lambda_r x}$.

10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

    Megoldás. Egy elsőrendű differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ha $y' = f(x)g(y)$ alakú.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-n+1}\right)^n$$
$$b_n = \frac{\sqrt{n} - n^{1/n} + \binom{2n}{4}}{n^3 - n\binom{n}{3} + n^2}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n}{n^2-n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{n}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-n+1}{n}}\right]^{\frac{n^2}{n^2-n+1}} = e,
\end{aligned}$$

mivel a szögletes zárójelen belüli rész határértéke e és $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2-n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - n^{1/n} + \binom{2n}{4}}{n^3 - n\binom{n}{3} + n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - n^{1/n} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24}}{n^3 - n\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-7/2} - \frac{n^{1/n}}{n^4} + \frac{2(2-\frac{1}{n})(2-\frac{2}{n})(2-\frac{3}{n})}{24}}{\frac{1}{n} - \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{6} + n^{-2}} = -4.
\end{aligned}$$

2. Végezze el az $f(x) = x^3 - 3ax$ függvény teljes függvényvizsgálatát ($a \in \mathbb{R}$ paraméter).

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, páratlan, nem periodikus, zérushelye $f(x) = x(x^2 - 3a)$ alapján $x = 0$, és $a > 0$ esetén ezen kívül $\pm\sqrt{3a}$ is.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{3a}{x^2}\right) = \pm\infty.$$

A deriváltak

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 3a \\
f''(x) &= 6x.
\end{aligned}$$

Az első derivált $a < 0$ esetén mindenhol szigorúan pozitív, $a \geq 0$ esetén a zérushelyei $\pm\sqrt{a}$, a második derivált zérushelye $x = 0$. Az előjelek $a > 0$ esetén

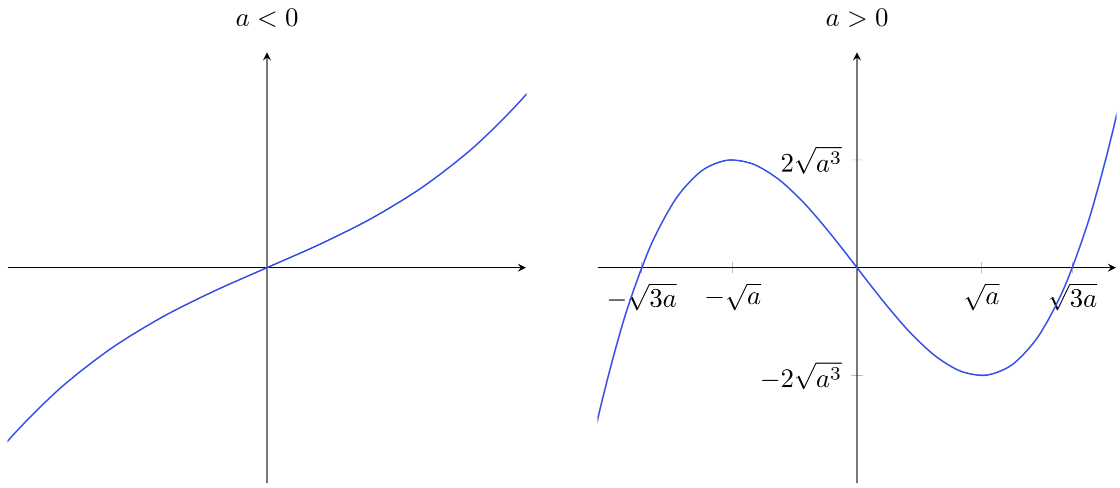
	$(-\infty, -\sqrt{a})$	$-\sqrt{a}$	$(-\sqrt{a}, 0)$	0	$(0, \sqrt{a})$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a}, \infty)$
f	╭	max	╮	infl	╰	min	╯
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$a < 0$ esetén pedig

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f	╭	infl	╯
f'	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \left(1 - \frac{3a}{x^2}\right) = \infty,$$

tehát nincs ferde aszimptota. $R_f = \mathbb{R}$, grafikon:



3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n$ sor konvergenciasugarát és összegfüggvényét.

   Megoldás. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján a konvergenciasugár

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{n}{2}} \right)^{-1} = 1.$$

   Az összegfüggvény

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n &= \frac{x^2}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{x^2}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1} \\
&= \frac{x^2}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \frac{x^2}{1-x} \\
&= \frac{x^2}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = \frac{x^2}{2} \frac{(2-2x)(1-x)^2 - (2x-x^2)\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} \\
&= \frac{x^2}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

4. Számítsa ki az $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ függvény integrálját a

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le x^2 + y^2 \le e^2 \right\}$$

   tartományon.

   Megoldás. Az integrált polárkoordinátákkal érdemes számolni, $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, a Jacobi-determináns r, az integrálási tartományt megadó egyenlőtlenségek $1 \le r \le e$, $0 \le \phi \le 2\pi$. Az r szerinti integrálást parciális integrálással végezzük:

$$\begin{aligned}
\iint_T f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \int_1^e \ln(r^2) r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = 4\pi \int_1^e \underbrace{r}_{f'} \underbrace{\ln r}_{g} \,\mathrm{d}r \\
&= 4\pi \left(\left[\frac{r^2}{2} \ln r \right]_1^e - \int_1^e \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} \,\mathrm{d}r \right) = 4\pi \left(\left[\frac{r^2}{2} \ln r \right]_1^e - \left[\frac{r^2}{4} \right]_1^e \right) \\
&= 4\pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = (1 + e^2)\pi.
\end{aligned}$$

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ vektormező? Ha igen, határozza meg egy potenciálfüggvényét.

   Megoldás. $\mathbf{u}$ mindenhol értelmezett és

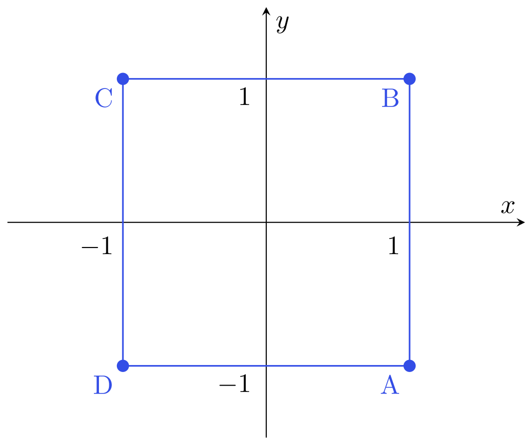
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial y} &= 2xy = \frac{\partial u_y}{\partial x} \\
\frac{\partial u_x}{\partial z} &= 2xz = \frac{\partial u_z}{\partial x} \\
\frac{\partial u_z}{\partial y} &= 2zy = \frac{\partial u_y}{\partial z},
\end{aligned}$$

tehát létezik potenciál (abból is következik a potenciál létezése, hogy $\mathbf{u}$ centrális vektormező). Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^x (\xi^3-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (x^2\eta+\eta^3-\eta)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z (x^2\zeta+y^2\zeta+\zeta^3-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x^2\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2} + x^2\frac{z^2}{2} + y^2\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2} \\
&= \frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).
\end{aligned}$$

6. Határozza meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = (x^3+y^3)\mathbf{i} + (y^3-x^3)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $ABCD$ négyzeteten, ha $A=(1,-1,0)$, $B=(1,1,0)$, $C=(-1,1,0)$, $D=(-1,-1,0)$.

   Megoldás. Zárt görbén integrálunk, így használhatjuk a Stokes-tételt: a keresett integrál egyenlő $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ integráljával bármely olyan S felületen, aminek a pereme az $ABCD$ négyzet.



   Legyen S a négyzet lapja, paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ ($u\in[-1,1]$, $v\in[-1,1]$), a normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},$$

   ami a jobbkéz-szabály szerinti irányításnak megfelelő. A vektormező rotációja

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (-3x^2-3y^2)\mathbf{k},
\end{aligned}$$

   a felületen kiértékelve

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) = -3(u^2+v^2)\mathbf{k}.$$

   Az integrál

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} \\
&= \int_{-1}^1\int_{-1}^1 \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= -3\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (u^2+v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= -3\int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3}+2v^2\right)\mathrm{d}v \\
&= -8.
\end{aligned}$$

7. Határozza meg a $\sqrt{x}y''+y'=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet a $v = y'$ új változóra nézve szétválasztható:

$$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{\sqrt{x}},$$

mindkét oldalt integráljuk.

$$\ln v = \int \frac{v'}{v}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{x} + C,$$

tehát $v(x) = Ce^{-2\sqrt{x}}$. Ebből újabb integrálással ($u = \sqrt{x}$, $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ helyettesítéssel) kapjuk az általános megoldást:

$$\begin{aligned}
y &= \int v\,\mathrm{d}x = C\int e^{-2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= C\int 2ue^{-2u}\,\mathrm{d}u = -Cue^{-2u} + C\int e^{-2u}\,\mathrm{d}u = -C\left(u + \frac{1}{2}\right)e^{-2u} + C_2 \\
&= -C\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)e^{-2\sqrt{x}} + C_2.
\end{aligned}$$