Matematika szigorlat G (A3) – 2022. június 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?
2. Definiálja az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0 pontbeli folytonosságát.
3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó minoránskritériumot.
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) megadott felületdarab felszínét?
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?
10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-n+1}\right)^n$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n} - n^{1/n} + \binom{2n}{4}}{n^3 - n\binom{n}{3} + n^2}$$

2. Végezze el az $f(x) = x^3 - 3ax$ függvény teljes függvényvizsgálatát ($a \in \mathbb{R}$ paraméter).
3. Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n$ sor konvergenciasugarát és összegfüggvényét.
4. Számítsa ki az $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ függvény integrálját a

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le x^2 + y^2 \le e^2\right\}$$

tartományon.
5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ vektormező? Ha igen, határozza meg egy potenciálfüggvényét.
6. Határozza meg az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^3+y^3)\mathbf{i}+(y^3-x^3)\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $ABCD$ négyzeten, ha $A = (1, -1, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (-1, 1, 0)$, $D = (-1, -1, 0)$.
7. Határozza meg a $\sqrt{x}y'' + y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.